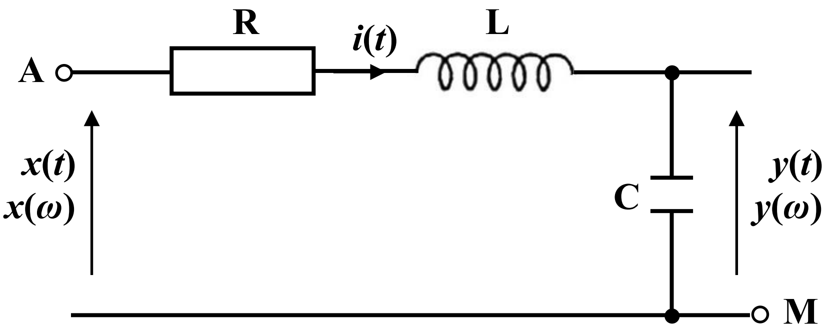
Filtres RLC, avec C en sortie

Partie 2. Filtre numérique

Section F. En utilisant l'approximation de Tustin

Jean-Pierre Waymel, F5FOD
21 septembre 2025 v03



Résumé

Nous partirons à nouveau de l'équation différentielle reliant la tension de sortie $y(t)$, ses deux dérivées successives et la tension d'entrée $x(t)$.

Nous procéderons ensuite en trois étapes :
- application de la transformation de Laplace à cette équation différentielle,
- utilisation de la transformée en z et de l'approximation de Tustin pour les signaux échantillonnés et numérisés,
- application de la transformée en z inverse.

Et nous obtiendrons alors l'équation du filtre numérique.

Les développements mathématiques qui sont à la base de ces transformations ne seront pas tous abordés dans cette section.

La validité de la méthode sera étudiée grâce à des simulations effectuées avec un tableur. À cet effet, le signal d'entrée sera un signal sinusoïdal.

Les résultats seront comparés avec les résultats issus de la solution formelle de l'équation différentielle et ceux du filtre numérique calculés à l'aide de l'approximation des différences finies (voir https://www.f5kee.fr/partie-2-section-e/). Nous en profiterons pour étudier l'impact d'une diminution de la fréquence d'échantillonnage.

Pulsation, fréquences et période

Fréquence du signal d'entrée du filtre : f

Pulsation et fréquence de résonance du filtre LC : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Fréquence et période d'échantillonnage : $Fs = \dfrac{1}{Ts}$

1. L'équation différentielle ($R \neq 0\ \Omega$) et sa mise sous forme canonique

Voir https://www.f5kee.fr/partie-1-section-b/ :

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \qquad (1)$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients réels et constants.

Soit ω_0 la pulsation de résonance du circuit LC et Q son facteur de qualité :

$$LC\omega_0^{\,2} = 1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Soit $m = \dfrac{1}{2Q}$, m étant le coefficient d'amortissement (avec $m \neq 0$ car $R \neq 0\ \Omega$).

Nous pouvons alors exprimer les produits LC et RC de la façon suivante :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^{\,2}} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{Q}\frac{1}{\omega_0} = 2m\frac{1}{\omega_0}$$

L'expression (1) devient alors :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\frac{1}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)} \qquad (2)$$

Nous considérerons que $x(t)$ est un signal causal : $x(t) = 0$ pour $t < 0$.

2. Première étape : application de la transformation de Laplace

Définition

La transformée de Laplace de $y(t)$, notée $\mathcal{L}\big(y(t)\big)(p)$ ou plus simplement $Y(p)$, est un opérateur ainsi défini :

$$\mathcal{L}\big(y(t)\big)(p) = Y(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}y(t)dt$$

La fonction $y(t)$ de la variable t est donc transformée en fonction $Y(p)$ de la variable p.
La variable t est un nombre réel. La variable p peut être un nombre réel ou un nombre complexe.
Dans les pays anglophones, c'est la lettre s qui est utilisée à la place de la lettre p.

Nous supposerons ici qu'il n'y a pas de problème de convergence pour effectuer le calcul de l'intégrale…

Application

Appliquons la transformation de Laplace à notre équation différentielle (2) :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\frac{1}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right)(p) = \mathcal{L}\big(x(t)\big)(p)$$

Comme la transformation de Laplace est un opérateur linéaire, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)(p)+2m\frac{1}{\omega_0}\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)(p)+\mathcal{L}\big(y(t)\big)(p)=X(p)$$

ou encore :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)(p)+2m\frac{1}{\omega_0}\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)(p)+Y(p)=X(p) \qquad (3)$$

On démontre assez facilement (intégration par parties) :

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)(p)=pY(p)-y(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)(p)=p^2Y(p)-py(0)-\frac{dy(0)}{dt}$$

Nous considérerons ici qu'à $t = 0$, la tension de sortie est nulle : $y(t) = y(0) = 0$.
De même pour le courant : $i(t) = i(0) = 0$.

Comme $\frac{dy(t)}{dt}=\frac{1}{C}i(t)$, $\frac{dy(0)}{dt}=\frac{1}{C}i(0)=0$.

Par conséquent :

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)(p)=pY(p) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)(p)=p^2Y(p)$$

En reportant ces expressions dans (3), nous obtenons :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}p^2Y(p)+2m\frac{1}{\omega_0}pY(p)+Y(p)=X(p) \qquad (4)$$

Expression à rapprocher de l'équation différentielle de départ (2) :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2m\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=x(t)$$

Nous en déduisons les règles de transformation très simples suivantes (avec nos conditions initiales) :

$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\to\times p^2}$ et $\boxed{\frac{d}{dt}\to\times p}$

Fonction de transfert du filtre

Appelons $H(p)$ la fonction de transfert du filtre :

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}$$

Nous obtenons finalement :

$$\boxed{H(p)=\frac{1}{\frac{1}{\omega_0^{\,2}}p^2+2m\frac{1}{\omega_0}p+1}} \qquad (5)$$

3. Variante : sans l'équation différentielle mais en utilisant les impédances complexes

Le gain en tension $G(j\omega)$ a pour expression :

$$G(j\omega)=\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}$$

À ce stade du calcul, remplaçons « $j\omega$ » par « p » :

$$G(p)=\frac{y(p)}{x(p)}=\frac{\dfrac{1}{Cp}}{R+Lp+\dfrac{1}{Cp}}=\frac{1}{RCp+LCp^2+1}$$

soit :

$$G(p)=\frac{1}{\dfrac{1}{\omega_0{}^2}p^2+2m\dfrac{1}{\omega_0}p+1}=H(p)$$

On retrouve ainsi très facilement l'expression (5) sans avoir besoin d'établir au préalable l'équation différentielle !

4. Deuxième étape : application de la transformation en *z*, approximation de Tustin et calcul de *H*(*z*)

Définition de la transformation en z

Maintenant échantillonnons et numérisons le signal $x(t)$ qui devient alors le signal $x(n)$, n étant un nombre entier. Voir https://www.f5kee.fr/partie-2-section-e/ paragraphe 3 : « L'échantillonnage et la numérisation ».

$x(n)$ est également un signal causal : $x(n) = 0$ pour $n < 0$.

La transformée en z de $x(n)$, notée $\mathcal{Z}\big(x(n)\big)(z)$ ou plus simplement $X(z)$, est un opérateur ainsi défini :

$$\mathcal{Z}\big(x(n)\big)(z)=X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}x(n)$$

z étant un nombre complexe.

La transformée en z de $x(n)$ est donc une fonction de z.

De même pour $y(n)$, à la sortie du filtre, « transformé » en $Y(z)$:

$$\mathcal{Z}\big(y(n)\big)(z)=Y(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}y(n)$$

Comment passer du monde de la transformée de Laplace « en p » au monde de la transformée « en z » ?

Pour obtenir $H(z)$, la fonction de transfert du filtre en z, nous utiliserons l'approximation de Tustin : dans l'expression (5) de $H(p)$, la fonction de transfert du filtre en p, il suffit de remplacer p par :

$$\boxed{\frac{2}{Ts}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Ts étant la période d'échantillonnage. Démonstration en annexe…

Partons donc de l'expression (5) et effectuons le remplacement indiqué ! Le calcul peut sembler laborieux mais il n'a rien de bien compliqué. Il suffit d'y aller pas à pas :

$$H(z)=\frac{1}{\frac{1}{{\omega_0}^2}\left(\frac{2}{Ts}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+2m\frac{1}{\omega_0}\frac{2}{Ts}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}$$

$$H(z)=\frac{1}{\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{4}{Ts^2}\frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2}+2m\frac{1}{\omega_0}\frac{2}{Ts}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}$$

Multiplions numérateur et dénominateur de $H(z)$ par $(1+z^{-1})^2$:

$$H(z)=\frac{(1+z^{-1})^2}{\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{4}{Ts^2}(1-z^{-1})^2+2m\frac{1}{\omega_0}\frac{2}{Ts}(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2}$$

Développons les expressions en z en utilisant les identités remarquables :

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{4}{Ts^2}(1-2z^{-1}+z^{-2})+2m\frac{1}{\omega_0}\frac{2}{Ts}(1-z^{-2})+1+2z^{-1}+z^{-2}}$$

Ordonnons :

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{\left(\frac{4}{{\omega_0}^2Ts^2}+4m\frac{1}{\omega_0Ts}+1\right)+\left(-\frac{8}{{\omega_0}^2Ts^2}+2\right)z^{-1}+\left(\frac{4}{{\omega_0}^2Ts^2}-4m\frac{1}{\omega_0Ts}+1\right)z^{-2}}$$

Multiplions numérateur et dénominateur de $H(z)$ par ${\omega_0}^2Ts^2$:

$$H(z)=\frac{({\omega_0}^2Ts^2)+(2{\omega_0}^2Ts^2)z^{-1}+({\omega_0}^2Ts^2)z^{-2}}{\left(4+4m\omega_0Ts+{\omega_0}^2Ts^2\right)+\left(-8+2{\omega_0}^2Ts^2\right)z^{-1}+\left(4-4m\omega_0Ts+{\omega_0}^2Ts^2\right)z^{-2}}$$

Effectuons les six notations suivantes :

$$D=4+4m\omega_0Ts+{\omega_0}^2Ts^2$$

$$a_1 = \frac{-8+2\omega_0{}^2Ts^2}{D} \qquad a_2 = \frac{4-4m\omega_0 Ts+\omega_0{}^2Ts^2}{D}$$

$$b_0 = \frac{\omega_0{}^2Ts^2}{D} \qquad b_1 = \frac{2\omega_0{}^2Ts^2}{D} \qquad b_2 = \frac{\omega_0{}^2Ts^2}{D}$$

Divisons numérateur et dénominateur de $H(z)$ par D :

$$\boxed{H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$$

Voilà une expression bien plus sympathique !

5. Troisième étape : application de la transformation en *z* inverse et obtention de l'équation du filtre

Comme $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$, nous pouvons écrire :

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \times Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \times X(z)$$

soit :

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) \qquad (6)$$

Nous connaissons les transformées en z de $x(n-1)$, $x(n-2)$, $y(n-1)$ et $y(n-2)$: voir annexe 1, « Transformée en z de $f(n-k)$ ». Or ces transformées apparaissent dans l'expression (6) ! Pour retrouver $y(n)$ et $x(n)$, il nous suffit donc de lui appliquer la transformation en z inverse notée $\mathcal{Z}^{-1}$:

$$\mathcal{Z}\big(x(n-1)\big)(z) = z^{-1}X(z) \Leftrightarrow \mathcal{Z}^{-1}\big(z^{-1}X(z)\big)(n) = x(n-1)$$

$$\mathcal{Z}\big(x(n-2)\big)(z) = z^{-2}X(z) \Leftrightarrow \mathcal{Z}^{-1}\big(z^{-2}X(z)\big)(n) = x(n-2)$$

De même pour y et Y.

Nous obtenons ainsi l'équation du filtre :

$$\boxed{y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)}$$

Par rapport à celle obtenue en utilisant l'approximation des différences finies (voir https://www.f5kee.fr/partie-2-section-e/), cette équation comporte deux éléments supplémentaires : $x(n-1)$ et $x(n-2)$. Mais elle reste très simple.

La valeur de l'échantillon n en sortie du filtre se calcule donc en fonction :
- de la valeur de l'échantillon n en entrée soit $x(n)$ et des valeurs des deux échantillons précédents en entrée soit $x(n-1)$ et $x(n-2)$,
- des valeurs des deux échantillons précédents en sortie soit $y(n-1)$ et $y(n-2)$.

Les coefficients b_0, b_1, b_2, a_1 et a_2 ne sont que des valeurs numériques dépendant de m et ω_0 (donc des valeurs de R, L et C) et de la période d'échantillonnage Ts.

Ils sont reliés par la relation suivante :

$b_0 + b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 1$

Cette relation reste vraie pour toute équation différentielle de la forme suivante :

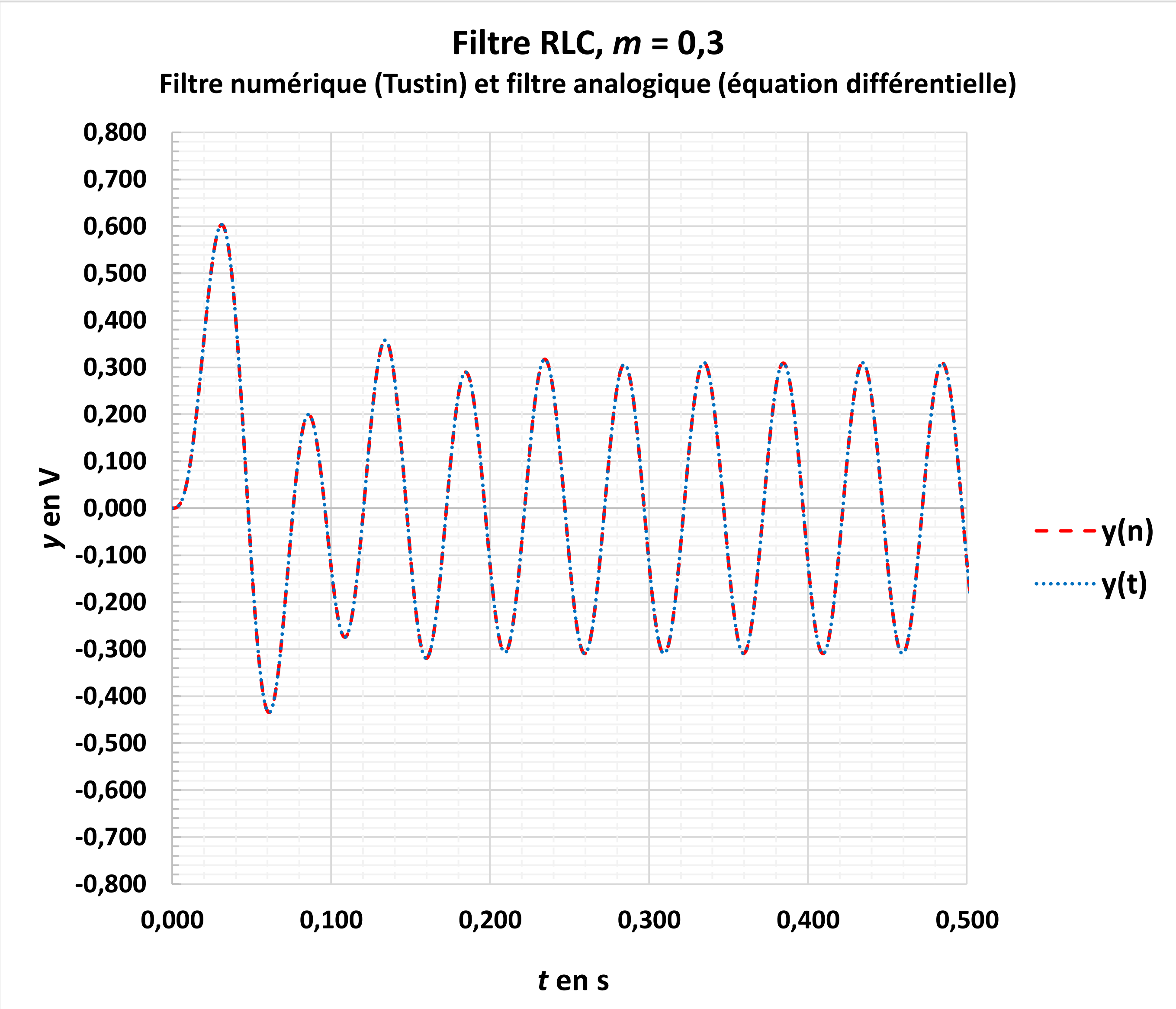
$$A\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

où A et B sont des nombres réels non nuls en même temps.

6. Simulation pratique avec Excel

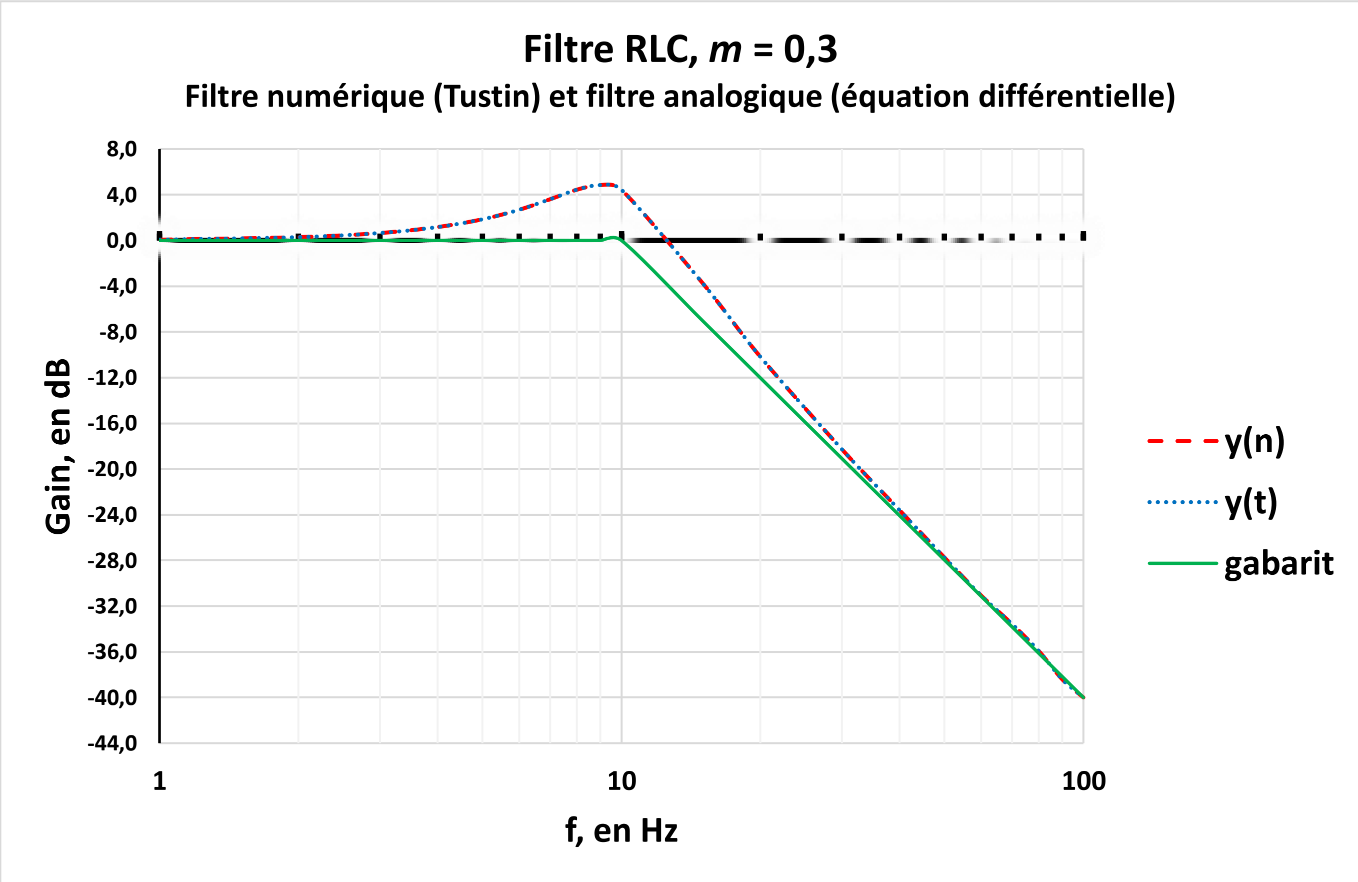
Nous reprendrons les mêmes données (voir https://www.f5kee.fr/partie-2-section-e/). Les courbes $y(n)$ et $y(t)$ se superposent parfaitement, y compris pendant le régime transitoire au démarrage. Les fichiers Excel sont disponibles sur simple demande.

Voici un exemple avec :
- fréquence de résonance : f_0 = 10 Hz
- coefficient d'amortissement : m = 0,3
- fréquence du signal d'entrée : f = 20 Hz, amplitude crête : E = 1 V
- fréquence d'échantillonnage : Fs = 2000 Hz



En régime établi, remarquons que les valeurs crêtes des tensions $y(n)$ et $y(t)$ peuvent être lues comme les valeurs des gains du filtre car $E = 1$ volt, E étant la valeur crête des tensions $x(n)$ et $x(t)$.

En reprenant le même exemple mais en faisant varier f de 1 à 100 Hz, nous pouvons tracer les courbes des gains dans le plan de Bode. Ces courbes se superposent également parfaitement :



Diminuons la fréquence d'échantillonnage

Dans les tableaux qui suivent, les valeurs des tensions $y(t)$ et $y(n)$ sont leurs valeurs crêtes en régime établi :

- $y(t)$: obtenu par résolution formelle de l'équation différentielle du filtre, voir https://www.f5kee.fr/partie-1-section-b/

- $y(n)$ *diff* : obtenu par l'approximation des différences finies, voir https://www.f5kee.fr/partie-2-section-e/

- $y(n)$ *Tust* : obtenu par l'approximation de Tustin

et :

$$diff \text{ versus } y(t) = 100\frac{y(n)\ diff - y(t)}{y(t)}$$

$$Tust \text{ versus } y(t) = 100\frac{y(n)\ Tust - y(t)}{y(t)}$$

Autrement dit, les écarts en pourcents des performances du filtre numérique par rapport au filtre analogique pour chacune des deux approximations effectuées.
Ceci pour trois valeurs de la fréquence d'échantillonnage *Fs* : 2000 Hz puis 1000 Hz et enfin 500 Hz.
Et pour cinq valeurs caractéristiques du coefficient *m* : 2 ; 1 ; $\sqrt{2}/2$; 0,3 ; 0,1.
En rouge quand un écart est supérieur ou égal à 1 %.
Sur fond grisé quand le résultat est peu significatif. En général pour f = 100 Hz où la tension crête n'est plus que de quelques millivolts.

(tableaux pages suivantes)

***m* = 2**

***f* (Hz)**	***Fs* = 2000 Hz**			***Fs* = 1000 Hz**			***Fs* = 500 Hz**		
	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***
1	**0,937**	0,936	0,937	**0,937**	0,936	0,937	**0,937**	0,934	0,937
5	**0,468**	0,466	0,468	**0,468**	0,464	0,468	**0,468**	0,460	0,468
10	**0,250**	0,248	0,250	**0,250**	0,246	0,250	**0,250**	0,242	0,250
20	**0,117**	0,115	0,117	**0,117**	0,113	0,117	**0,117**	0,110	0,116
100	**0,009**	0,009	0,009	**0,009**	0,009	0,009	**0,008**	0,007	0,006

***f* (Hz)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* *versus* *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* *versus* *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**
1		-0,1%	0,0%		-0,1%	0,0%		-0,3%	0,0%
5		-0,4%	0,0%		-0,9%	0,0%		-1,7%	0,0%
10		-0,8%	0,0%		-1,6%	0,0%		-3,2%	0,0%
20		-1,7%	0,0%		-3,4%	0,0%		-6,0%	-0,9%
100		0,0%	0,0%		0,0%	0,0%		-12,5%	-25,0%

***m* = 1**

***f* (Hz)**	***Fs* = 2000 Hz**			***Fs* = 1000 Hz**			***Fs* = 500 Hz**		
	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***
1	**0,990**	0,990	0,990	**0,990**	0,989	0,990	**0,990**	0,989	0,990
5	**0,800**	0,795	0,800	**0,800**	0,790	0,800	**0,800**	0,780	0,800
10	**0,500**	0,492	0,500	**0,500**	0,485	0,500	**0,500**	0,470	0,499
20	**0,200**	0,195	0,200	**0,200**	0,190	0,200	**0,200**	0,182	0,198
100	**0,010**	0,010	0,010	**0,010**	0,010	0,009	**0,009**	0,009	0,007

***f* (Hz)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* *versus* *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* *versus* *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**
1		0,0%	0,0%		-0,1%	0,0%		-0,1%	0,0%
5		-0,6%	0,0%		-1,3%	0,0%		-2,5%	0,0%
10		-1,6%	0,0%		-3,0%	0,0%		-6,0%	-0,2%
20		-2,5%	0,0%		-5,0%	0,0%		-9,0%	-1,0%
100		0,0%	0,0%		0,0%	-10,0%		0,0%	-22,2%

***m* = 0,707**

***f* (Hz)**	***Fs* = 2000 Hz**			***Fs* = 1000 Hz**			***Fs* = 500 Hz**		
	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***
1	**1,000**	1,000	1,000	**1,000**	0,999	1,000	**1,000**	0,999	1,000
5	**0,970**	0,964	0,970	**0,970**	0,958	0,970	**0,970**	0,945	0,970
10	**0,707**	0,692	0,707	**0,707**	0,677	0,707	**0,707**	0,649	0,706
20	**0,243**	0,236	0,242	**0,242**	0,230	0,241	**0,242**	0,220	0,240
100	**0,010**	0,010	0,010	**0,010**	0,010	0,009	**0,009**	0,009	0,007

***f* (Hz)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**
1		0,0%	0,0%		-0,1%	0,0%		-0,1%	0,0%
5		-0,6%	0,0%		-1,2%	0,0%		-2,6%	0,0%
10		-2,1%	0,0%		-4,2%	0,0%		-8,2%	-0,1%
20		-2,9%	-0,4%		-5,0%	-0,4%		-9,1%	-0,8%
100		0,0%	0,0%		0,0%	-10,0%		0,0%	-22,2%

***m* = 0,3**

***f* (Hz)**	***Fs* = 2000 Hz**			***Fs* = 1000 Hz**			***Fs* = 500 Hz**		
	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***
1	**1,008**	1,008	1,008	**1,008**	1,008	1,008	**1,008**	1,008	1,008
5	**1,238**	1,232	1,238	**1,238**	1,227	1,238	**1,238**	1,215	1,238
10	**1,667**	1,584	1,667	**1,667**	1,508	1,666	**1,667**	1,377	1,664
20	**0,309**	0,304	0,309	**0,309**	0,298	0,308	**0,309**	0,288	0,305
100	**0,010**	0,010	0,010	**0,010**	0,010	0,009	**0,009**	0,010	0,007

***f* (Hz)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**
1		0,0%	0,0%		0,0%	0,0%		0,0%	0,0%
5		-0,5%	0,0%		-0,9%	0,0%		-1,9%	0,0%
10		-5,0%	0,0%		-9,5%	-0,1%		-17,4%	-0,2%
20		-1,6%	0,0%		-3,6%	-0,3%		-6,8%	-1,3%
100		0,0%	0,0%		0,0%	-10,0%		11,1%	-22,2%

***m* = 0,1**

***f* (Hz)**	***Fs* = 2000 Hz**			***Fs* = 1000 Hz**			***Fs* = 500 Hz**		
	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***	***y*(*t*)**	***y*(*n*) *diff***	***y*(*n*) *Tustin***
1	**1,010**	1,010	1,010	**1,010**	1,010	1,010	**1,010**	1,010	1,010
5	**1,322**	1,319	1,322	**1,322**	1,317	1,322	**1,322**	1,311	1,322
10	**5,000**	4,321	5,000	**5,000**	3,804	4,998	**5,000**	3,068	4,993
20	**0,330**	0,328	0,330	**0,330**	0,325	0,329	**0,330**	0,320	0,325
100	**0,010**	0,010	0,010	**0,010**	0,010	0,009	**0,010**	0,011	0,007

***f* (Hz)**		***diff* versus *y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff versus y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**		***diff versus y*(*t*)**	***Tustin* versus *y*(*t*)**
1		0,0%	0,0%		0,0%	0,0%		0,0%	0,0%
5		-0,2%	0,0%		-0,4%	0,0%		-0,8%	0,0%
10		-13,6%	0,0%		-23,9%	0,0%		-38,6%	-0,1%
20		-0,6%	0,0%		-1,5%	-0,3%		-3,0%	-1,5%
100		0,0%	0,0%		0,0%	-10,0%		10,0%	-30,0%

7. Conclusion

L'approximation de Tustin est plus précise que l'approximation des différences finies. Surtout quand la fréquence d'échantillonnage diminue et que la fréquence d'entrée augmente, ce qui correspond à une augmentation de la période d'échantillonnage et une diminution de la période du signal d'entrée.
Ce qui est tout à fait logique au regard des types d'approximations réalisées.

Annexe

L’approximation de Tustin

Nous supposerons que toutes les conditions sont satisfaites pour que les transformées existent : transformées de Laplace et transformées en *z*.

Transformée en *z* de *f*(*n* – *k*)

f est ici un signal causal discret admettant une transformée en *z*, *n* et *k* étant deux nombres entiers, avec *k* supérieur ou égal à 0.
Appliquons-lui la définition de la transformation en *z* :

$$\mathcal{Z}\big(f(n-k)\big)(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} f(n-k)$$

Effectuons maintenant un changement de variable : $N=n-k$.

$$\mathcal{Z}\big(f(n-k)\big)(z)=\sum_{N=-k}^{+\infty} z^{-(N+k)} f(N)$$

Comme *f* est un signal causal, *f*(*N*) = 0 pour toute valeur de *N* inférieure à 0. Donc :

$$\mathcal{Z}\big(f(n-k)\big)(z)=\sum_{N=0}^{+\infty} z^{-(N+k)} f(N)=\sum_{N=0}^{+\infty} z^{-N} z^{-k} f(N)$$

z^{-k} étant une constante peut être sorti de la sommation :

$$\mathcal{Z}\big(f(n-k)\big)(z)=z^{-k}\sum_{N=0}^{+\infty} z^{-N} f(N)$$

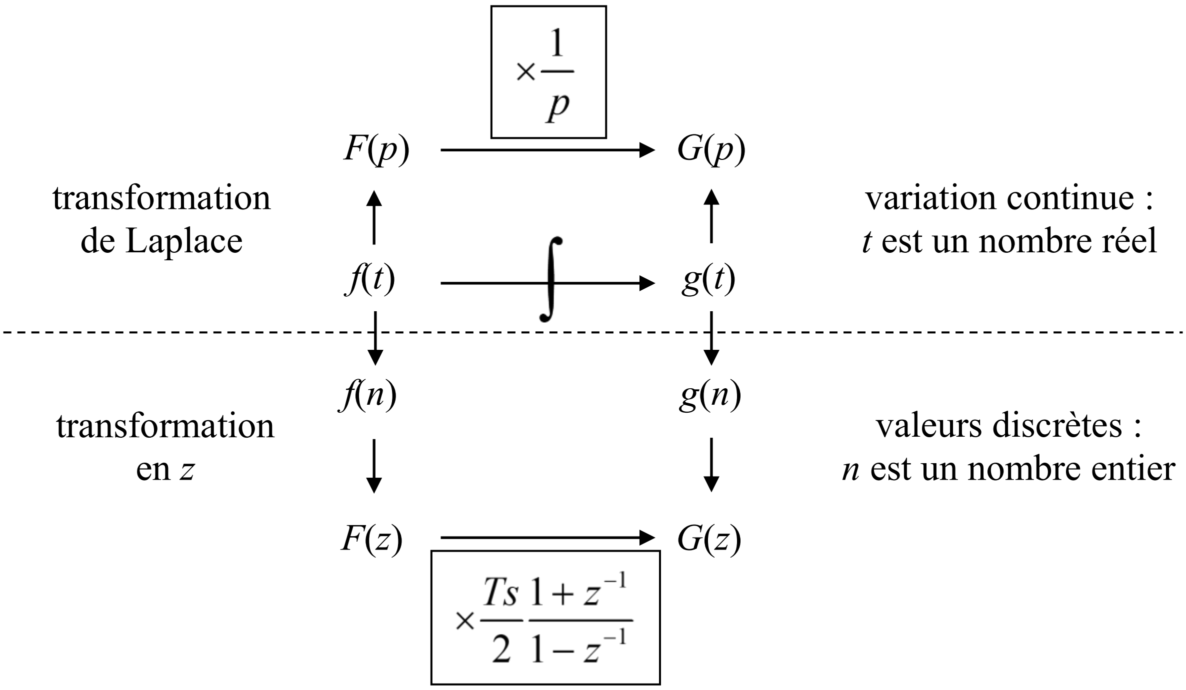
Par conséquent :

$$\boxed{\mathcal{Z}\big(f(n-k)\big)(z)=z^{-k}\mathcal{Z}\big(f(n)\big)(z)} \qquad (7)$$

(voir page suivante)

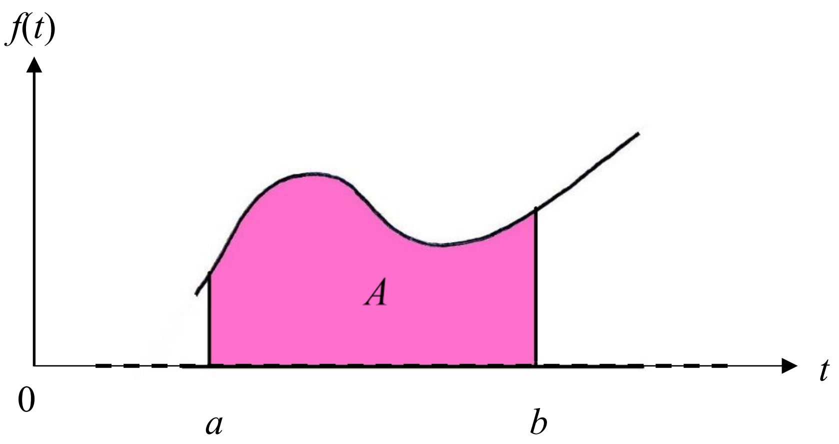
Passer du monde « en p » au monde « en z » avec l'approximation de Tustin

Schéma résumé



Calcul d'une aire A

Soit t un nombre réel, $f(t)$ et son graphe, du moins en vue partielle et agrandie :



Soit $g(t) = \int_0^t f(t)dt$, cf. le schéma résumé pour $f(t)$ et $g(t)$.

Nous allons calculer l'aire A sous la courbe représentant $f(t)$, entre les abscisses a et b :

$$A = \int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

Supposons que a et b soit les abscisses de deux échantillons successifs du même signal $f(t)$ une fois celui-ci échantillonné et numérisé, avec une période d'échantillonnage égale à Ts. Par exemple les échantillons $(n - 1)$ et n :

$a = (n-1)Ts$ et $b = nTs$

D'où :

$A(n) = g(nTs) - g\big((n-1)Ts\big) = g(n) - g(n-1)$, cf. le schéma résumé pour $g(n)$.

Appliquons la transformation en z :

$$\mathcal{Z}\big(A(n)\big)(z) = \mathcal{Z}\big(g(n)\big)(z) - \mathcal{Z}\big(g(n-1)\big)(z)$$

Or nous avons :

$\mathcal{Z}\big(g(n)\big)(z) = G(z)$, cf. le schéma résumé pour $G(z)$

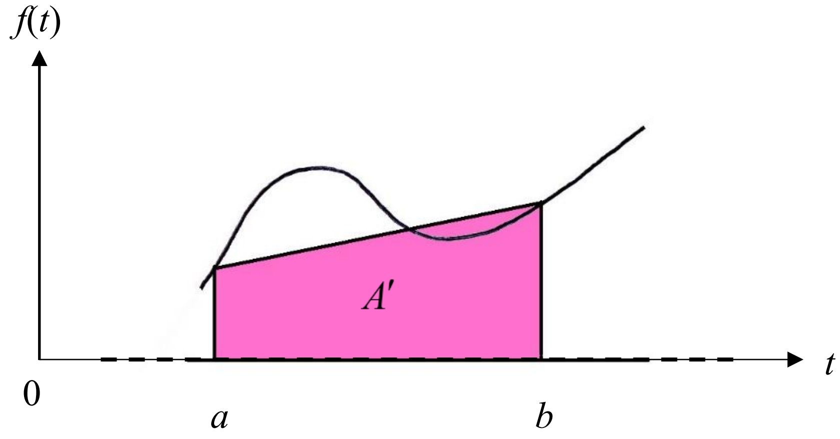
et

$\mathcal{Z}\big(g(n-1)\big)(z) = z^{-1}G(z)$, en appliquant (7) avec $k = 1$.

Donc :

$$\mathcal{Z}\big(A(n)\big)(z) = G(z) - z^{-1}G(z) = (1 - z^{-1})G(z) \qquad (8)$$

Calcul d'une aire A'



Toujours entre les abscisses a et b, mais sous la forme du trapèze indiqué sur le graphe :

$$A' = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a)$$

Soit :

$$A'(n) = \frac{f(nTs) + f\big((n-1)Ts\big)}{2}\big(nTs - (n-1)Ts\big)\big)$$

C'est-à-dire :

$A'(n) = \dfrac{f(n) + f(n-1)}{2}Ts$, cf. le schéma résumé pour $f(n)$.

Appliquons la transformation en z :

$$\mathcal{Z}\big(A'(n)\big)(z) = \frac{Ts}{2}\Big[\mathcal{Z}\big(f(n)\big)(z) + \mathcal{Z}\big(f(n-1)\big)(z)\Big]$$

Or nous avons :

$\mathcal{Z}\big(f(n)\big)(z) = F(z)$, cf. le schéma résumé pour $F(z)$

et

$\mathcal{Z}\big(f(n-1)\big)(z) = z^{-1}F(z)$, en appliquant à nouveau (7) avec $k = 1$.

Donc :

$$\mathcal{Z}\big(A'(n)\big)(z) = \frac{Ts}{2}(1+z^{-1})F(z) \qquad (9)$$

Approximation de Tustin

Si Ts est suffisamment petit devant les durées des variations rapides de $f(t)$, nous pouvons faire l'approximation du trapèze, reprise par Tustin :

$A' = A$ donc $\mathcal{Z}\big(A'(n)\big)(z) = \mathcal{Z}\big(A(n)\big)(z)$.

En rapprochant les expressions (8) et (9), nous en déduisons :

$$(1-z^{-1})G(z) = \frac{Ts}{2}(1+z^{-1})F(z)$$

soit :

$$\boxed{G(z) = \frac{Ts}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}F(z)} \qquad (10)$$

Transformée de Laplace de g(t)

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$ et $G(p)$ la transformée de Laplace de $g(t)$, cf. le schéma résumé.

Or $f(t)$ étant la dérivée de $g(t)$, nous avons $F(p) = pG(p)$ et donc :

$$\boxed{G(p) = \frac{1}{p}F(p)} \qquad (11)$$

Conséquence

En rapprochant les expressions (10) et (11), nous constatons que dans le monde « en z », le facteur $\frac{Ts}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ a le même rôle que le facteur $\frac{1}{p}$ dans le monde « en p ».

De même pour les facteurs inverses :

$$\frac{2}{Ts}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \text{et} \quad p$$

Autrement dit, dans les expressions « en p », il suffira de remplacer p par $\frac{2}{Ts}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ pour obtenir l'expression correspondante « en z ».