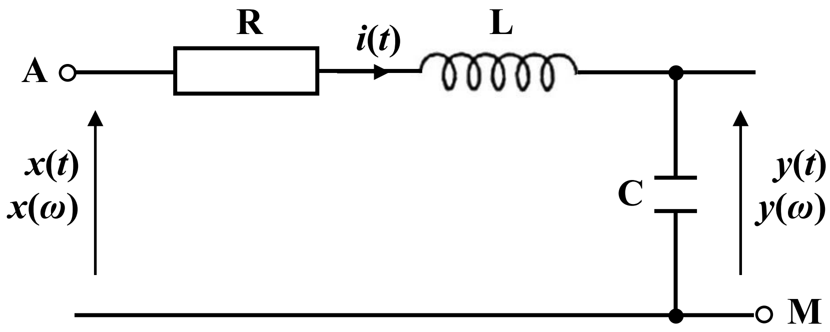
# Filtres RLC, avec C en sortie

## Partie 1. Filtre analogique, avec de vrais composants R, L et C passifs

### Section B. En résolvant l'équation différentielle

Jean-Pierre Waymel, F5FOD
10 septembre 2025 v06




**Résumé**

Dans cette section, nous calculerons l'expression de la tension de sortie en fonction du temps $y(t)$ en résolvant de manière formelle l'équation différentielle qui lie cette tension, ses deux dérivées successives et la tension d'entrée. Cette tension d'entrée sera ici sinusoïdale et de la forme $x(t) = E\sin(\omega t)$.

Ce calcul s'effectuera en trois étapes :
- en annulant le « second membre » de l'équation différentielle, nous obtiendrons l'équation dite *homogène*. Nous en calculerons la solution $y_h(t)$ dans les trois cas possibles selon la valeur du coefficient d'amortissement *m* par rapport à 1 ;
- après avoir rétabli le second membre de l'équation différentielle, nous rechercherons une solution dite *particulière* $y_p(t)$ ;
- nous obtiendrons la solution complète en faisant la somme $y_h(t) + y_p(t)$ et en tenant compte des conditions initiales suivantes : $y(0) = 0$ volt et $i(0) = 0$ ampère.

Nous constaterons :
- qu'à $t = 0$ s, la tension du signal de sortie sera bien égale à 0 volt, la tension du signal d'entrée étant alors égale à 0 volt,
- que la tension $y_h(t)$ s'annulera d'autant plus vite que *m* sera petit devant 1,
- qu'il ne restera alors que la tension $y_p(t)$ qui ne sera rien d'autre que la tension trouvée en section A grâce aux impédances complexes !

*En définitive, les impédances complexes donnent la solution au problème de façon extrêmement simple à condition de ne s'intéresser qu'au régime établi une fois passé le régime transitoire de démarrage.*

**1. L'équation différentielle (attention : $R \neq 0$ ohm)**

Appliquons la loi d'Ohm entre A et M :

$$x(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t)$$

Aux bornes du condensateur :

$$dq = i(t)dt = Cdy(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) \quad \Rightarrow \quad LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (1)$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients réels et constants.

**2. La mise sous forme canonique**

Soit $\omega_0$ la pulsation de résonance du circuit LC et $Q$ son facteur de qualité :

$$LC\omega_0^{\,2} = 1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Soit $m = \dfrac{1}{2Q}$, $m$ étant le coefficient d'amortissement **(avec $m \neq 0$ car $R \neq 0$ ohm).**

Nous pouvons alors exprimer les produits $LC$ et $RC$ de la façon suivante :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^{\,2}} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{Q}\frac{1}{\omega_0} = 2m\frac{1}{\omega_0}$$

L'expression (1) devient :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\frac{1}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (2)$$

**3. Le signal d'entrée, ici sinusoïdal**

Appliquons à l'entrée du filtre un signal sinusoïdal : $x(t) = E\sin(\omega t)$

L'expression (2) devient :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\frac{1}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = E\sin(\omega t) \quad (3)$$

**4. L'équation *homogène***

Annulons le second membre, nous obtenons l'équation dite « *homogène* » :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\frac{1}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \quad (4)$$

Ou, pour en simplifier l'écriture :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5}$$

avec $a = \frac{1}{\omega_0^{\ 2}}$, $b = 2m\frac{1}{\omega_0}$ et $c = 1$.

Essayons la solution classique $y = e^{rt}$ :

$$y' = re^{rt}$$
$$y'' = r^2 e^{rt}$$

Reportons dans (5) :

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

et divisons par $e^{rt}$ :

$ar^2 + br + c = 0$ soit :

$$\frac{1}{\omega_0^{\ 2}} r^2 + 2m\frac{1}{\omega_0} r + 1 = 0 \tag{6}$$

Cette équation du second degré en $r$ est appelée *« l'équation caractéristique »* de l'équation différentielle (4).

Calculons son discriminant $\Delta$ :

$$\Delta = 4m^2\frac{1}{\omega_0^{\ 2}} - 4\frac{1}{\omega_0^{\ 2}} = 4\left(m^2 - 1\right)\frac{1}{\omega_0^{\ 2}}$$

Il faut donc distinguer trois cas selon la valeur de $m$ (rappelons que $m$ est toujours positif).

4.1 Premier cas : $m > 1$

Le discriminant est positif et l'équation caractéristique (6) possède deux racines réelles $r_1$ et $r_2$ :

$$r_1 = \frac{-2m\frac{1}{\omega_0} - \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{\omega_0^{\ 2}}} = \left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0 \qquad r_2 = \frac{-2m\frac{1}{\omega_0} + \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{\omega_0^{\ 2}}} = \left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0$$

L'équation *homogène* (4) possède donc deux solutions linéairement indépendantes :

$e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$.

Par conséquent, sa solution générale est la suivante :

$$y(t) = y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \tag{7}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

4.2 Deuxième cas : $m = 1$

Le discriminant est nul et l'équation caractéristique (6) possèdent une racine réelle double $r$ :

$$r = \frac{-2m\frac{1}{\omega_0}}{\frac{2}{\omega_0{}^2}} = -m\omega_0 = -\omega_0$$

Cherchons une deuxième solution, la première étant $e^{rt}$.

Utilisons *« la méthode de variation des constantes »* en posant comme solution possible l'expression $y = u(t)e^{rt} = ue^{rt}$ :

$$y' = u'e^{rt} + rue^{rt}$$

$$y'' = u''e^{rt} + ru'e^{rt} + ru'e^{rt} + r^2ue^{rt} = u''e^{rt} + 2ru'e^{rt} + r^2ue^{rt}$$

Reportons ces expressions dans (5) :

$$a\left(u''e^{rt} + 2ru'e^{rt} + r^2ue^{rt}\right) + b\left(u'e^{rt} + rue^{rt}\right) + c\left(ue^{rt}\right) = 0$$

Divisons par $e^{rt}$ et ordonnons :

$$au'' + (2ar + b)u' + \left(ar^2 + br + c\right)u = 0$$

Or $ar^2 + br + c = 0$ et $r = -\frac{b}{2a}$

donc :

$u'' = 0$ => $u' = \lambda$ => $u = \lambda t + const_1$ (attention : dans ce deuxième cas, $\lambda$ est en V/s),

où $\lambda$ et $const_1$ sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

L'équation *homogène* (4) possède donc deux solutions linéairement indépendantes :

$e^{rt}$ et $(\lambda t + const_1)e^{rt}$

Par conséquent, sa solution générale est la suivante :

$$y(t) = y_h(t) = const_2 e^{rt} + (\lambda t + const_1)e^{rt}$$

où $const_2$ est aussi une constante réelle dépendant des conditions initiales.

Soit finalement :

$$y(t) = y_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt} \qquad (8)$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

4.3 Troisième cas : $m < 1$

Le discriminant est négatif : $\Delta = -4\left(1-m^2\right)\frac{1}{{\omega_0}^2} = 4j^2\left(1-m^2\right)\frac{1}{{\omega_0}^2}$.

et l'équation caractéristique (6) possèdent deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm j\beta$ :

$$\alpha \pm j\beta = \left(-m \pm j\sqrt{1-m^2}\right)\omega_0$$

avec :

$$\alpha = -m\omega_0$$
$$\beta = \sqrt{1-m^2}\,\omega_0$$

Avec la racine $\alpha + j\beta$, l'équation *homogène* (5) possède donc la solution suivante :

$$e^{(\alpha+j\beta)t} = e^{\alpha t}e^{j\beta t} = e^{\alpha t}\left[\cos\left(\beta t\right) + j\sin\left(\beta t\right)\right] = e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + je^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right) = u + jv$$

ce $u$ étant une fonction locale à ce paragraphe 4.3.

Reportons cette solution dans cette équation *homogène :*

$$a\left(u+jv\right)'' + b\left(u+jv\right)' + c\left(u+jv\right) = 0$$

Ordonnons :

$$\left(au'' + bu' + cu\right) + j\left(av'' + bv' + cv\right) = 0$$

soit :

$$au'' + bu' + cu = 0$$
$$av'' + bv' + cv = 0$$

Par conséquent, $u$ et $v$ soit $e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right)$ et $e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right)$ sont solutions de l'équation *homogène*. Elles sont linéairement indépendantes.

La racine $\alpha - j\beta$ apporte une nouvelle solution possible : $-v$ mais cette solution est linéairement dépendante de $+v$.
Par conséquent, la solution générale de l'équation *homogène* (4) est la suivante :

$$y(t) = y_h(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + \mu e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right) \tag{9}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

## 5. La solution *particulière*

Cherchons maintenant une solution *particulière* $y_p(t)$ à l'équation (3), donc avec second membre. Ce second membre n'est autre que le signal d'entrée, un signal sinusoïdal.

Comme ce second membre est ici un sinus, une solution *particulière* pourrait comprendre un sinus. Mais sa dérivée ferait apparaître un cosinus. Une solution possible serait d'associer un sinus et un cosinus.

Testons donc la forme suivante :

$$y_p(t) = K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t)$$

où K et M seraient des constantes.

Dérivons $y_p(t)$ une première fois :

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = -K\omega\sin(\omega t) + M\omega\cos(\omega t)$$

puis une seconde fois :

$$\frac{d^2y_p(t)}{dt^2} = -K\omega^2\cos(\omega t) - M\omega^2\sin(\omega t)$$

Reportons ces expressions de dérivée dans l'équation (3) :

$$\frac{1}{\omega_0{}^2}\left[-K\omega^2\cos(\omega t) - M\omega^2\sin(\omega t)\right] +$$
$$2m\frac{1}{\omega_0}\left[-K\omega\sin(\omega t) + M\omega\cos(\omega t)\right] +$$
$$K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t) = E\sin(\omega t)$$

Ordonnons en cosinus et sinus :

$$\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}K + 2m\frac{\omega}{\omega_0}M + K\right)\cos(\omega t) + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}M - 2m\frac{\omega}{\omega_0}K + M - E\right)\sin(\omega t) = 0$$

Comme cette expression doit toujours être nulle quel que soit *t*, nous obtenons :

$$-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}K + 2m\frac{\omega}{\omega_0}M + K = 0$$

$$-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}M - 2m\frac{\omega}{\omega_0}K + M - E = 0$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues *K* et *M*, *E* étant un paramètre (c'est la valeur maximale du signal sinusoïdal appliqué en entrée entre A et M).

Ce qui donne :

$$K = \frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}E \qquad \text{et} \qquad M = \frac{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}E \qquad (10) \text{ et } (11)$$

Donc $y_p(t) = K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t)$ est bien une solution *particulière* de l'équation (3).

Remarquons que *K* est toujours négatif.

*Autre forme de la solution* particulière

Nous allons exprimer la solution *particulière* $y_p(t) = K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t)$ sous forme d'une seule ligne trigonométrique :

$$y_p(t) = amplitude\_max \times \sin(\omega t + \varphi)$$

soit :

$$y_p(t) = amplitude\_max \times \left[\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

ou :

$$y_p(t) = \left[amplitude\_max \times \sin(\varphi)\right]\cos(\omega t) + \left[amplitude\_max \times \cos(\varphi)\right]\sin(\omega t)$$

Par conséquent :

$$amplitude\_max \times \sin(\varphi) = K \quad => \quad amplitude\_max^2 \times \sin^2(\varphi) = K^2$$

$$amplitude\_max \times \cos(\varphi) = M \quad => \quad amplitude\_max^2 \times \cos^2(\varphi) = M^2$$

et :

$$K^2 + M^2 = amplitude\_max^2$$

$amplitude\_max = \sqrt{K^2 + M^2}$ (en tenant compte que $amplitude\_max > 0$).

En outre :

$$\sin(\varphi) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + M^2}} \qquad \cos(\varphi) = \frac{M}{\sqrt{K^2 + M^2}} \qquad \tan(\varphi) = \frac{K}{M} \qquad (12)$$

soit :

$$\tan(\varphi) = \frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}}$$

et :

$$\varphi = \arctan\frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}}$$

**=> Nous retrouvons exactement l'expression (5) de la partie 1 section A !**

Comme $K$ est toujours négatif, $\sin(\varphi)$ est toujours négatif.

Le signe de $\cos(\varphi)$ est celui de $M$, soit celui de son numérateur $1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}$.

Par conséquent :

- si $\omega < \omega_0$ => $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$

- si $\omega = \omega_0$ => $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

- si $\omega > \omega_0$ => $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$

La phase $\varphi$ est toujours négative.

Avec Excel, nous pouvons utiliser la formule suivante :
$\varphi = \text{atan2}(M;K)$

Finalement, nous obtenons l'autre expression de $y_p(t)$ :

$$y_p(t) = \sqrt{K^2 + M^2}\sin(\omega t + \varphi)$$

En remplaçant $K$ et $M$ par leurs expressions (10) et (11), nous obtenons :

$$amplitude\_max = \sqrt{K^2 + M^2} = \sqrt{\frac{4m^2\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + 4m^2\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right]^2}E^2}$$

soit :

$$amplitude\_max = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + 4m^2\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}}E$$

D'où le module du gain en tension :

$$|G(\omega)| = \frac{amplitude\_max}{E} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + 4m^2\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}}$$

**=> Nous retrouvons exactement l'expression (4) de la partie 1 section A !**

**6. La solution complète de l’équation différentielle avec second membre**

C’est la somme de la solution de l’équation *homogène* et de la solution *particulière* :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_h(t) + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t) \qquad (13)$$

avec les coefficients $K$ et $M$ calculés en (10) et (11).

6.1 Premier cas : $m > 1$

$$y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

avec :

$$r_1 = \left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = \left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0$$

Par conséquent :

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t) \qquad (14)$$

Il nous reste donc à calculer $\lambda$ et $\mu$.

Pour ce faire, précisons les conditions initiales.

Nous considérerons ici qu’à $t = 0$, la tension de sortie est nulle : $y(t) = y(0) = 0$.

Faisons $t = 0$ dans l’expression (14) :

$$y(0) = 0 = \lambda + \mu + K$$

De même, nous considérerons ici qu’à $t = 0$, le courant est nul : $i(t) = i(0) = 0$.

Comme $\dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t)$, $\dfrac{dy(0)}{dt} = \dfrac{1}{C}i(0) = 0$.

Par conséquent $\dfrac{dy(0)}{dt} = 0$.

Calculons la dérivée de $y(t)$ :

$$\frac{dy(t)}{dt} = r_1 e^{r_1 t}\lambda + r_2 e^{r_2 t}\mu - K\omega\sin(\omega t) + M\omega\cos(\omega t) \qquad (15)$$

et faisons $t = 0$ dans cette expression (15) :

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0 = r_1\lambda + r_2\mu + M\omega$$

Nous obtenons donc un système de deux équations à deux inconnues $\lambda$ et $\mu$ *:*

$$\lambda + \mu = -K$$

$$r_1\lambda + r_2\mu = -M\omega$$

Ce qui donne :

$$\lambda = \frac{M\omega - r_2 K}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{r_1 K - M\omega}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0}$$

Dans l'expression de la solution $y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, remarquons que $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$.
Les deux exponentielles vont donc s'éteindre au bout d'un « certain temps ».

*Application numérique et graphes*

$L$ = 2,533 H $\quad\quad$ $C$ = 100 µF

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62{,}83222$ rad/s soit $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \sim 10$ Hz et $T_0 = \dfrac{1}{f_0} \sim 0{,}1$ s.

$m = 2$ => $R = 2mL\omega_0 \sim 636{,}62\ \Omega$

Exemple purement théorique avec des composants parfaits !

Signal d'entrée :

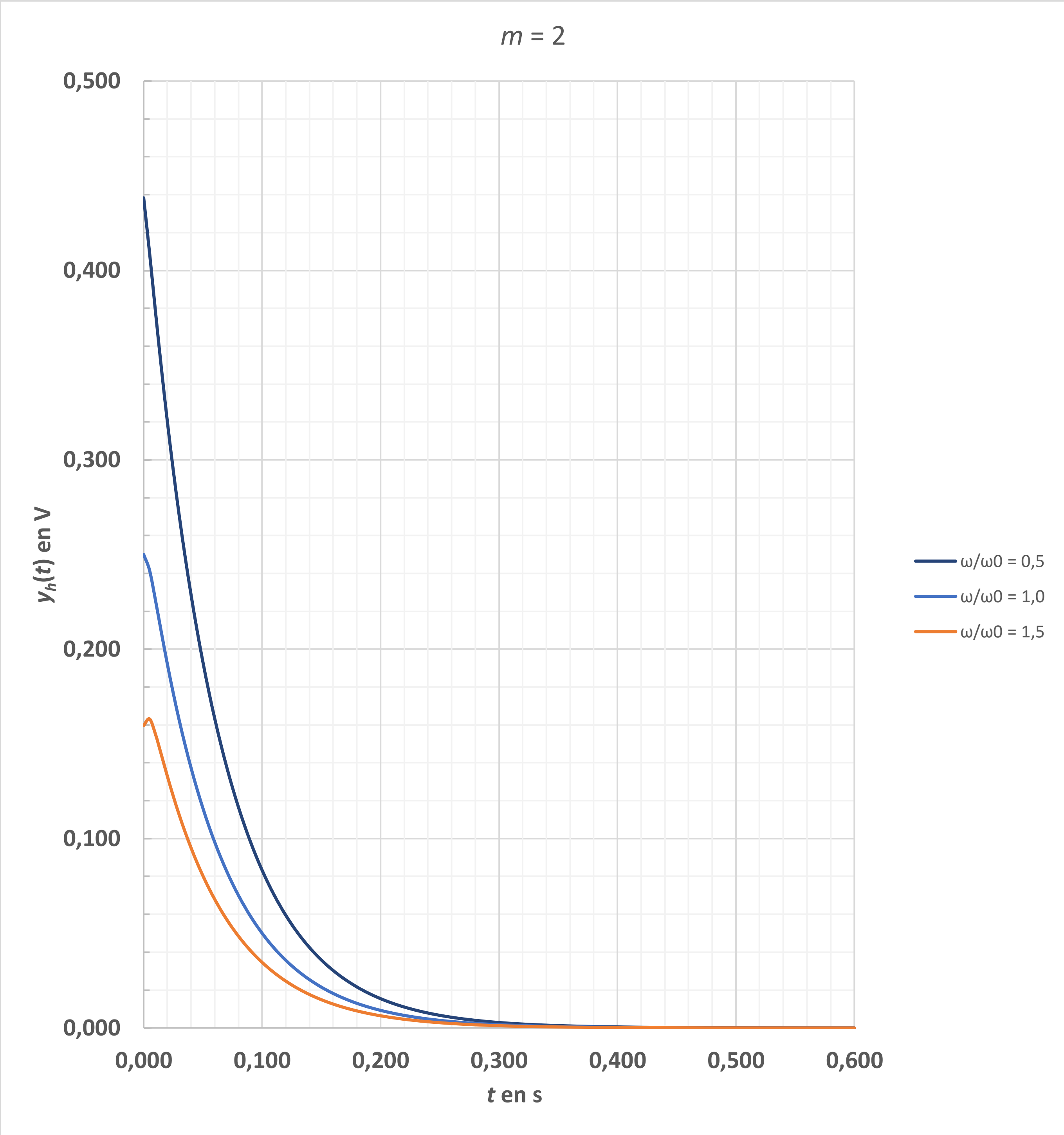
$x(t) = \sin(\omega t)$, donc $E$ = 1 V, et prenons trois valeurs de pulsation ω telles que $\omega/\omega_0$ vaille successivement 0,5 puis 1 et enfin 1,5.

Voir les trois graphes pages suivantes.

Ce premier graphe représente la solution de l'équation *homogène* $y_h(t)$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0{,}438$ V ; $0{,}250$ V ; $0{,}160$ V, selon la fréquence du signal d'entrée.

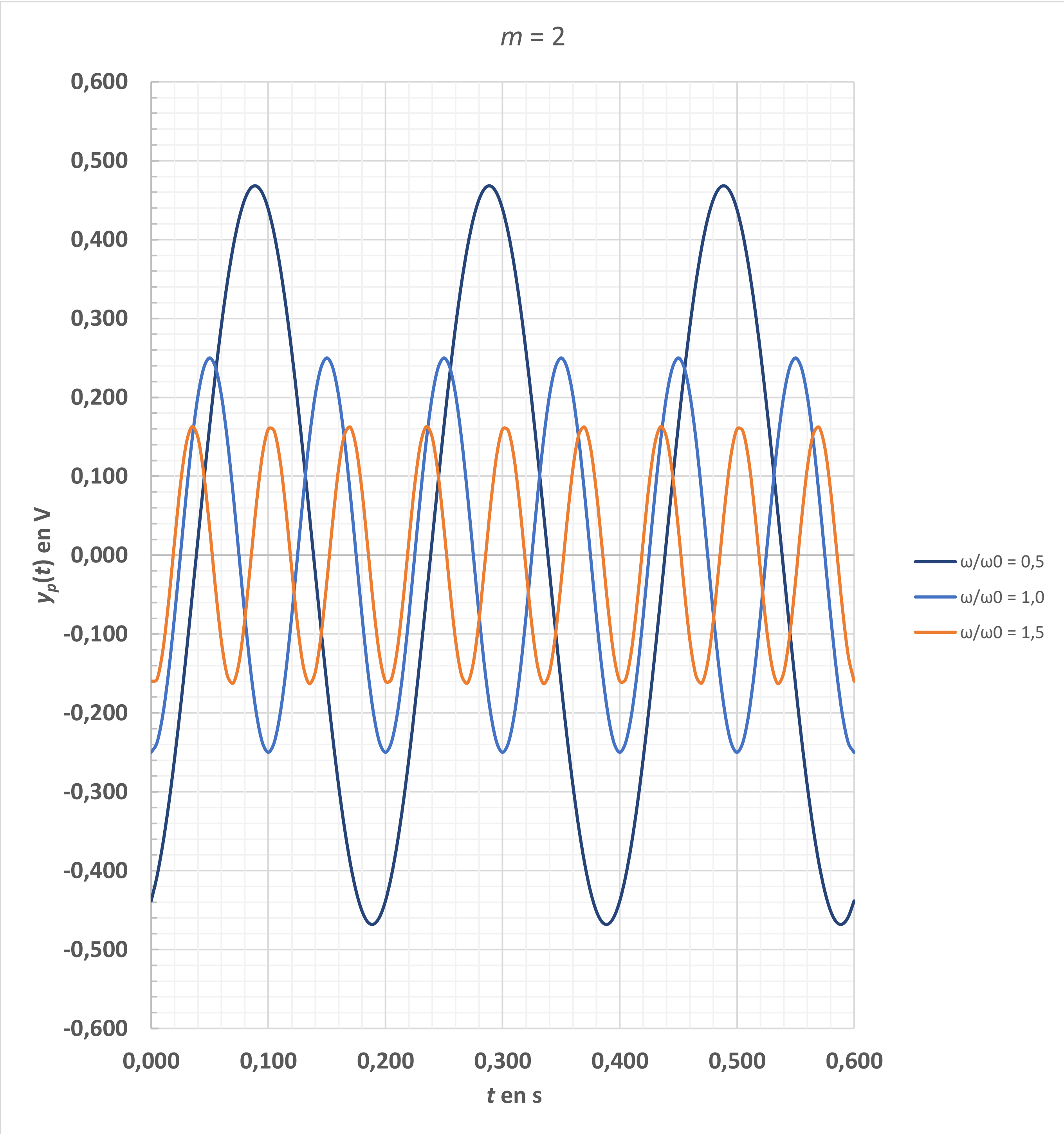
À $t = 4T_0$, $y_h(t) = y_h(4T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Ce deuxième graphe représente la solution *particulière* $y_p(t)$.

Il s'agit donc du tracé sinusoïdal régulier attendu.

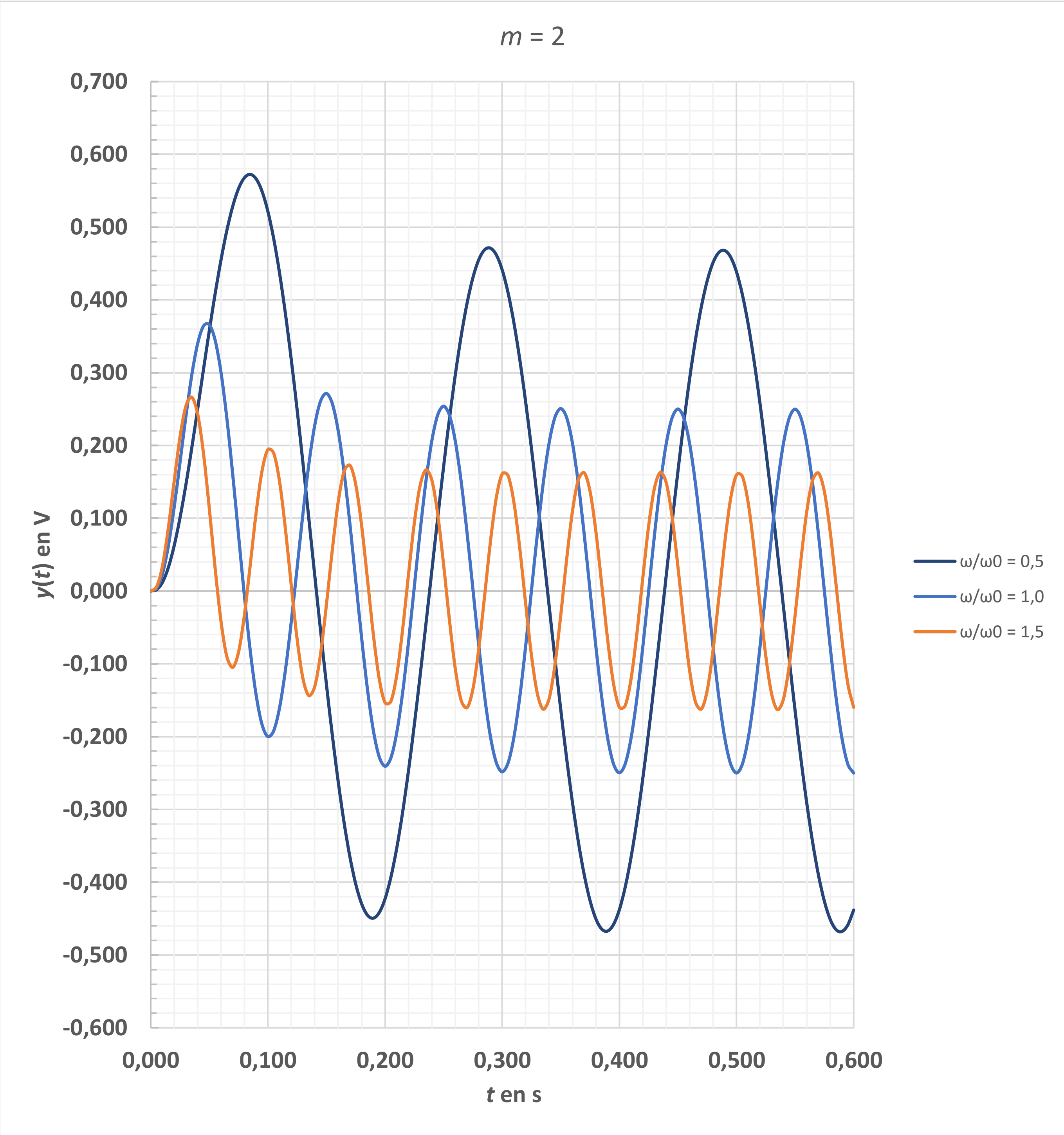
À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0{,}438$ V ; $-0{,}250$ V ; $-0{,}160$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$ !



Ce troisième graphe représente la solution de l'équation différentielle $y(t)$ posée en (3).

Il s'agit donc de la somme $y_h(t)+y_p(t)$.

À $t=0$ s, $y(t)=y(0)=0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



*Interprétation*

À $t = 0$ s, nous avons les conditions initiales suivantes : la tension aux bornes de C est nulle et il n'y a pas de courant dans le circuit.

Nous appliquons alors une tension sinusoïdale à l'entrée du filtre.

S'ensuivent deux phases successives :

a) la phase transitoire au démarrage, pendant quelques périodes $T_0$.
La tension du signal à la sortie du filtre est égale à la somme de la tension donnée par la solution de l'équation *homogène* et de la tension donnée par la solution *particulière* ;

b) puis la tension donnée par la solution de l'équation *homogène* s'éteint et ne subsiste que la tension donnée par la solution *particulière*.
Cette solution *particulière* est directement accessible en utilisant les nombres complexes (partie 1, section A).

6.2 Deuxième cas : $m = 1$

$$y_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$$

avec :

$$r = -\omega_0$$

Par conséquent :

$$y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt} + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t) \qquad (16)$$

Il nous reste donc à calculer $\lambda$ et $\mu$.

Reprenons les mêmes conditions initiales, celles du premier cas $m > 1$ :

$$y(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy(0)}{dt} = 0$$

Faisons $t = 0$ dans l'expression (16) :

$y(0) = 0 = \mu + K$, donc $\mu = -K$.

Calculons la dérivée de $y(t)$ :

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda e^{rt} + r(\lambda t + \mu)e^{rt} - K\omega\sin(\omega t) + M\omega\cos(\omega t) \qquad (17)$$

et faisons $t = 0$ dans l'expression (17) :

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0 = \lambda + r\mu + M\omega$$

$$\lambda = -r\mu - M\omega = rK - M\omega$$

Ce qui donne :

$\lambda = rK - M\omega$ et $\mu = -K$

Dans l'expression de la solution $y_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$, remarquons que $r < 0$.
L'exponentielle va donc s'éteindre au bout d'un « certain temps ».

*Application numérique et graphes*

Reprenons les mêmes données qu'au paragraphe 6.1.

$L$ = 2,533 H $C$ = 100 µF

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62{,}83222$ rad/s soit $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \sim 10$ Hz et $T_0 = \dfrac{1}{f_0} \sim 0{,}1$ s

Cette fois-ci $m = 1$ => $R = 2mL\omega_0 \sim 318{,}31\ \Omega$

Exemple purement théorique avec des composants parfaits !

Signal d'entrée :

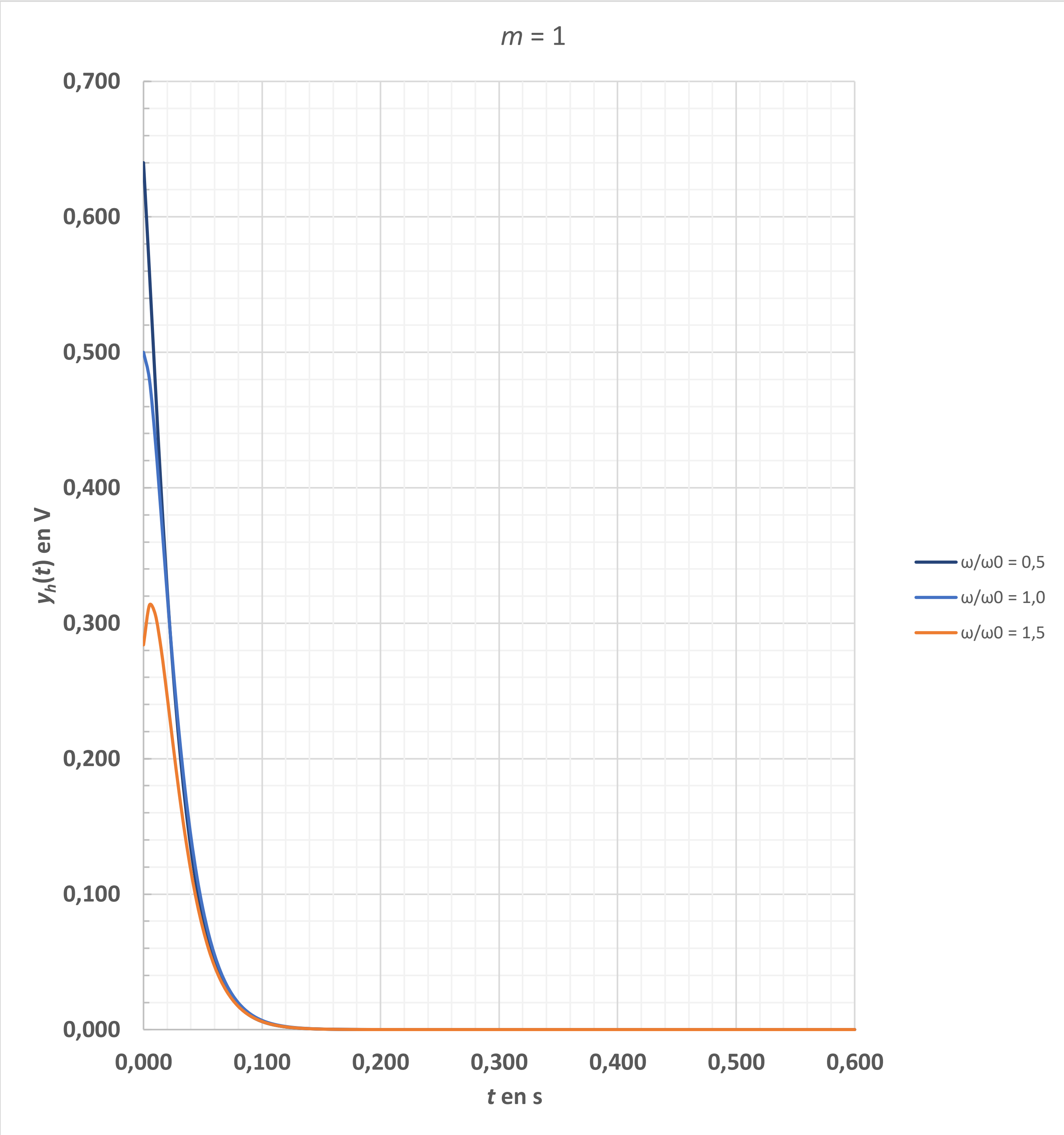
$x(t) = \sin(\omega t)$, donc $E$ = 1 V, et prenons trois valeurs de pulsation ω telles que $\omega/\omega_0$ vaille successivement 0,5 puis 1 et enfin 1,5.

Voir les trois graphes pages suivantes.

Ce premier graphe représente la solution de l'équation *homogène* $y_h(t)$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0{,}640$ V ; $0{,}500$ V ; $0{,}284$ V, selon la fréquence du signal d'entrée.

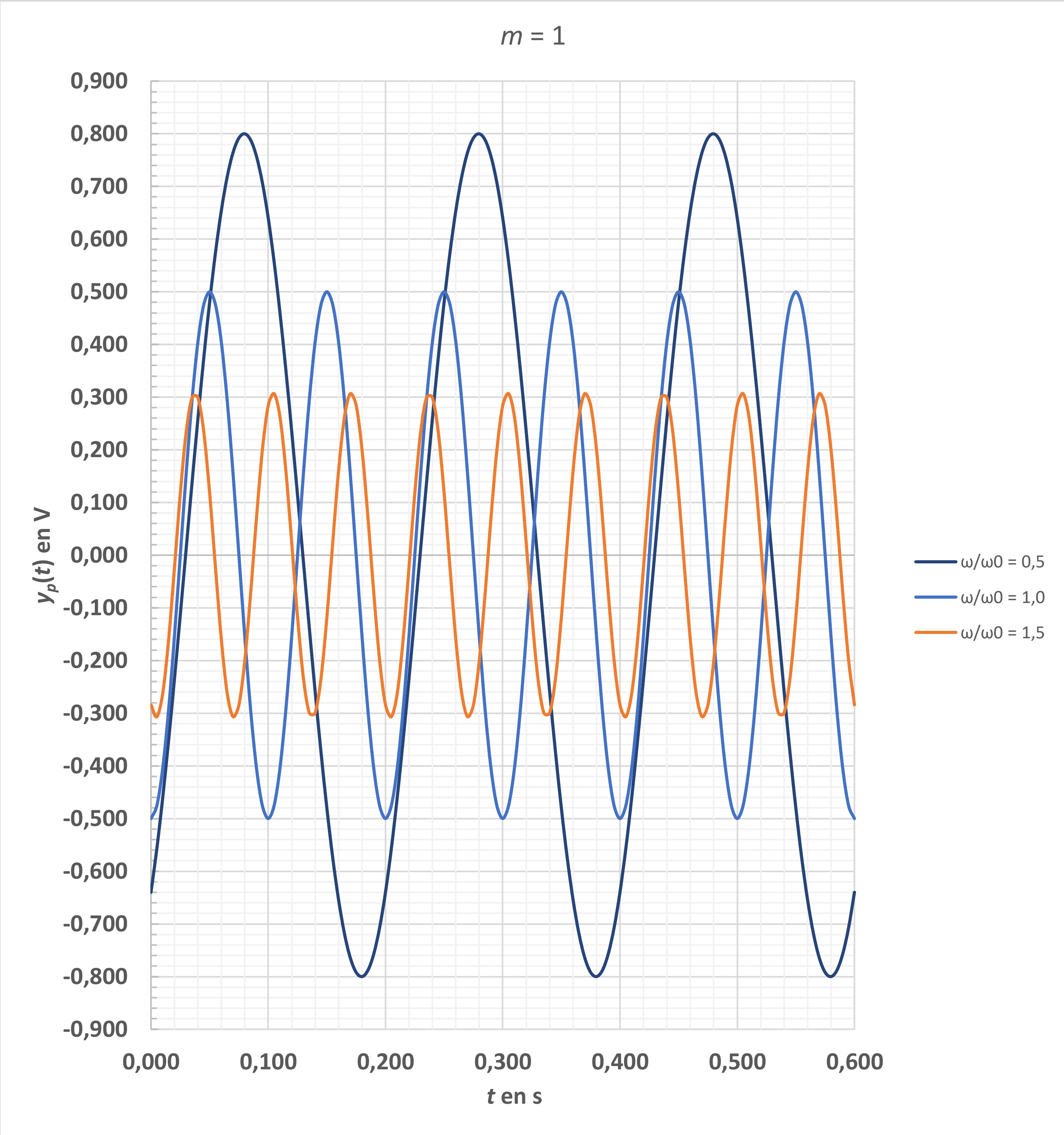
À $t = 2T_0$, $y_h(t) = y_h(2T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Ce deuxième graphe représente la solution *particulière* $y_p(t)$.

Il s'agit donc du tracé sinusoïdal régulier attendu.

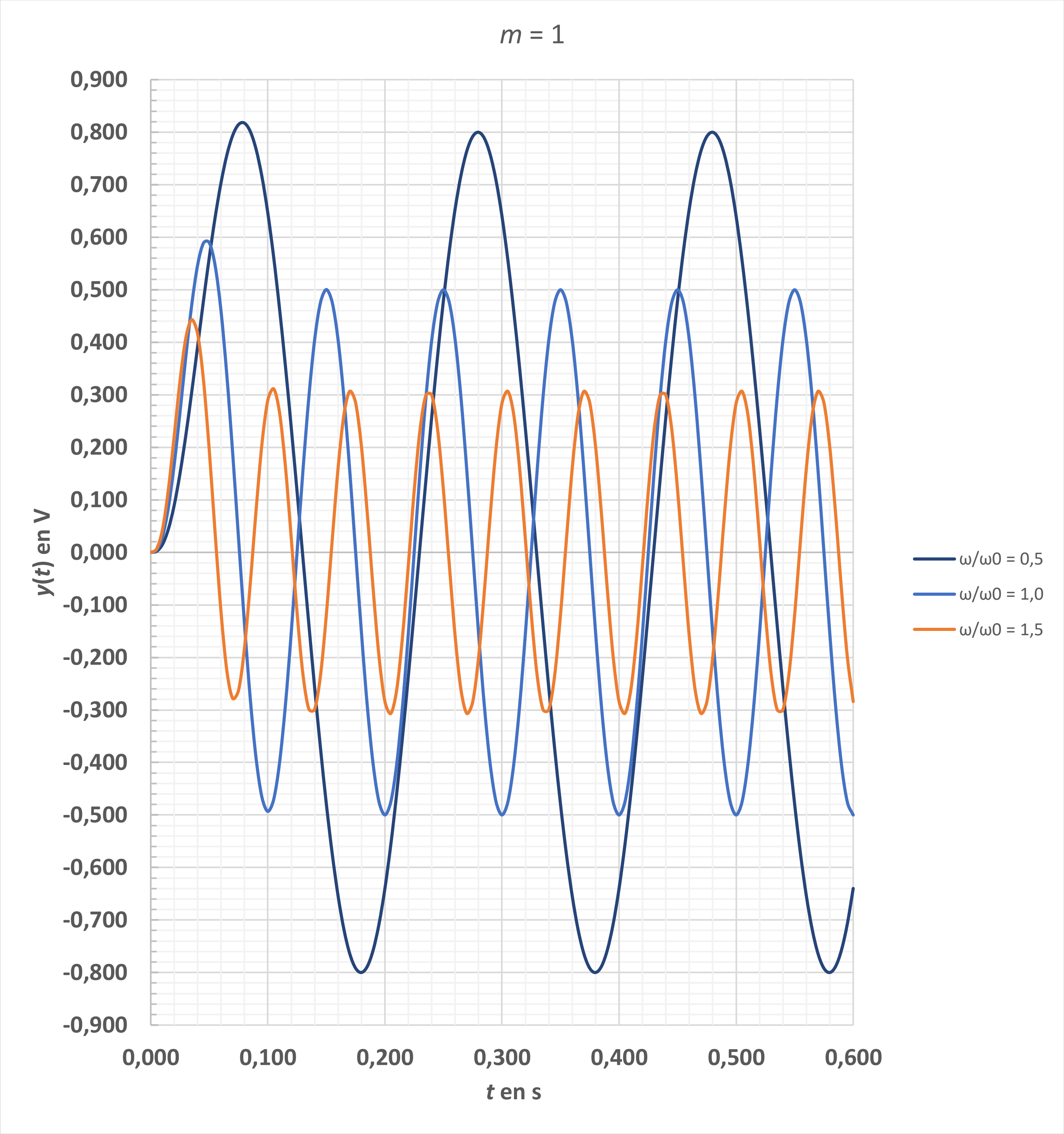
À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0{,}640$ V ; $-0{,}500$ V ; $-0{,}284$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$ !



Ce troisième graphe représente la solution de l'équation différentielle $y(t)$ posée en (3).

Il s'agit donc de la somme $y_h(t) + y_p(t)$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



*Interprétation*

Même interprétation qu'au paragraphe *6.1*.

<u>6.3 Troisième cas : $m < 1$</u>

$$y_h(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + \mu e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right)$$

avec :

$$\alpha = -m\omega_0$$

$$\beta = \sqrt{1-m^2}\,\omega_0$$

Par conséquent :

$$y(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + \mu e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right) + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t)$$

soit :

$$y(t) = e^{\alpha t}\left[\lambda\cos\left(\beta t\right) + \mu\sin\left(\beta t\right)\right] + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t) \qquad (18)$$

Il nous reste donc à calculer $\lambda$ et $\mu$.

Reprenons les mêmes conditions initiales, celles du premier cas $m > 1$ :

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0$$

Faisons $t = 0$ dans l'expression (18) :

$y(0) = 0 = \lambda + K$, donc $\lambda = -K$

Calculons la dérivée de $y(t)$ :

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^{\alpha t}\left[\alpha\lambda\cos\left(\beta t\right) + \alpha\mu\sin\left(\beta t\right) - \beta\lambda\sin\left(\beta t\right) + \beta\mu\cos\left(\beta t\right)\right] - K\omega\sin(\omega t) + M\omega\cos(\omega t) \qquad (19)$$

et faisons $t = 0$ dans l'expression (19) :

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0 = \alpha\lambda + \beta\mu + M\omega$$

$$\mu = \frac{-\alpha\lambda - M\omega}{\beta} = \frac{\alpha K - M\omega}{\beta}$$

Ce qui donne :

$$\lambda = -K \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\alpha K - M\omega}{\beta}$$

Dans l'expression de la solution $y_h(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, remarquons que $\alpha < 0$.
L'exponentielle va donc s'éteindre au bout d'un « certain temps ».

*Application numérique et graphes*

Reprenons les mêmes données qu'au paragraphe 6.1.

$L$ = 2,533 H $\qquad$ $C$ = 100 µF

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62{,}83222$ rad/s soit $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \sim 10$ Hz et $T_0 = \dfrac{1}{f_0} \sim 0{,}1$ s

Cette fois-ci $m = \sqrt{2}/2$ => $R = 2mL\omega_0 \sim 225{,}08\ \Omega$
puis $m = 0{,}3$ => $R \sim 95{,}49\ \Omega$
et $m = 0{,}1$ => $R \sim 31{,}83\ \Omega$

Exemples purement théoriques avec des composants parfaits !

Signal d'entrée :

$x(t) = \sin(\omega t)$, donc $E$ = 1 V, et prenons trois valeurs de pulsation ω telles que $\omega/\omega_0$ vaille successivement 0,5 puis 1 et enfin 1,5.

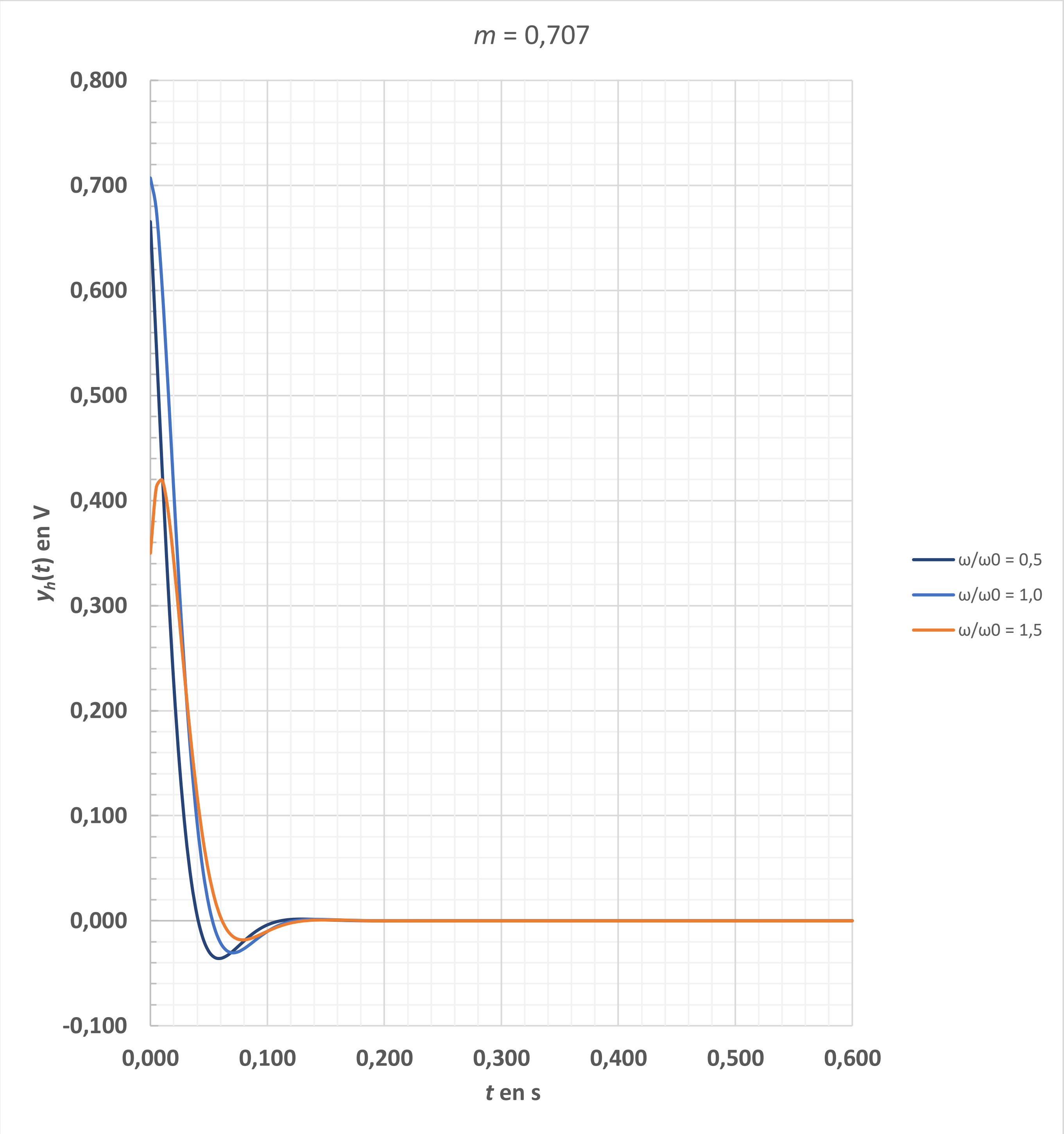
Voir les neuf graphes pages suivantes.

Les trois graphes suivants représentent la solution de l'équation *homogène* $y_h(t)$.

Le premier graphe ci-dessous correspond au cas $m = \sqrt{2}/2 \sim 0,707$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0,666$ V ; 0,707 V ; 0,350 V, selon la fréquence du signal d'entrée.

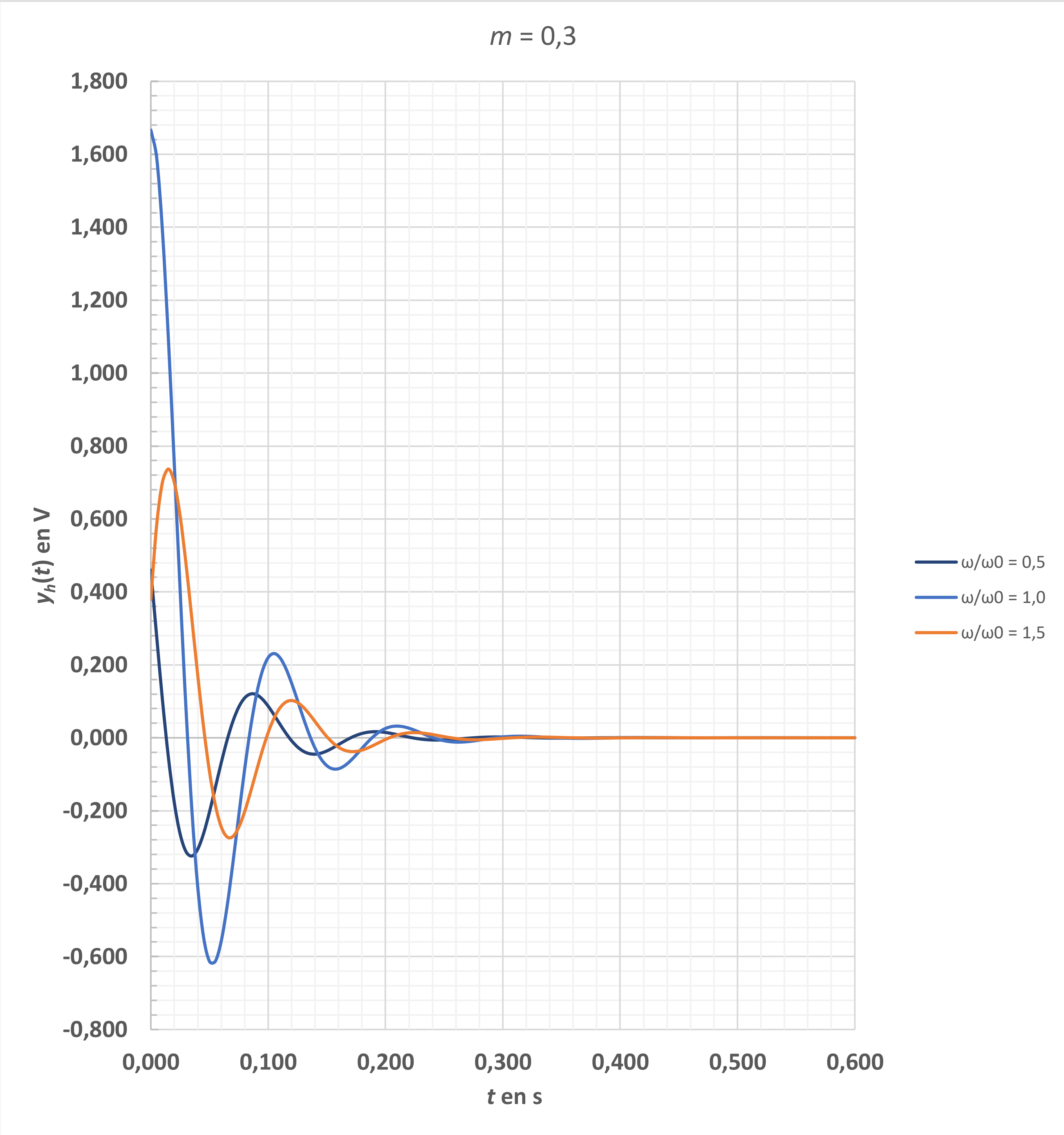
À $t = 1,5T_0$, $y_h(t) = y_h(1,5T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0{,}3$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0{,}460$ V ; 1,667 V ; 0,379 V, selon la fréquence du signal d'entrée. La surtension apparaît (1,667 V pour $\omega = \omega_0$) car maintenant le coefficient d'amortissement $m$ est petit devant 1.

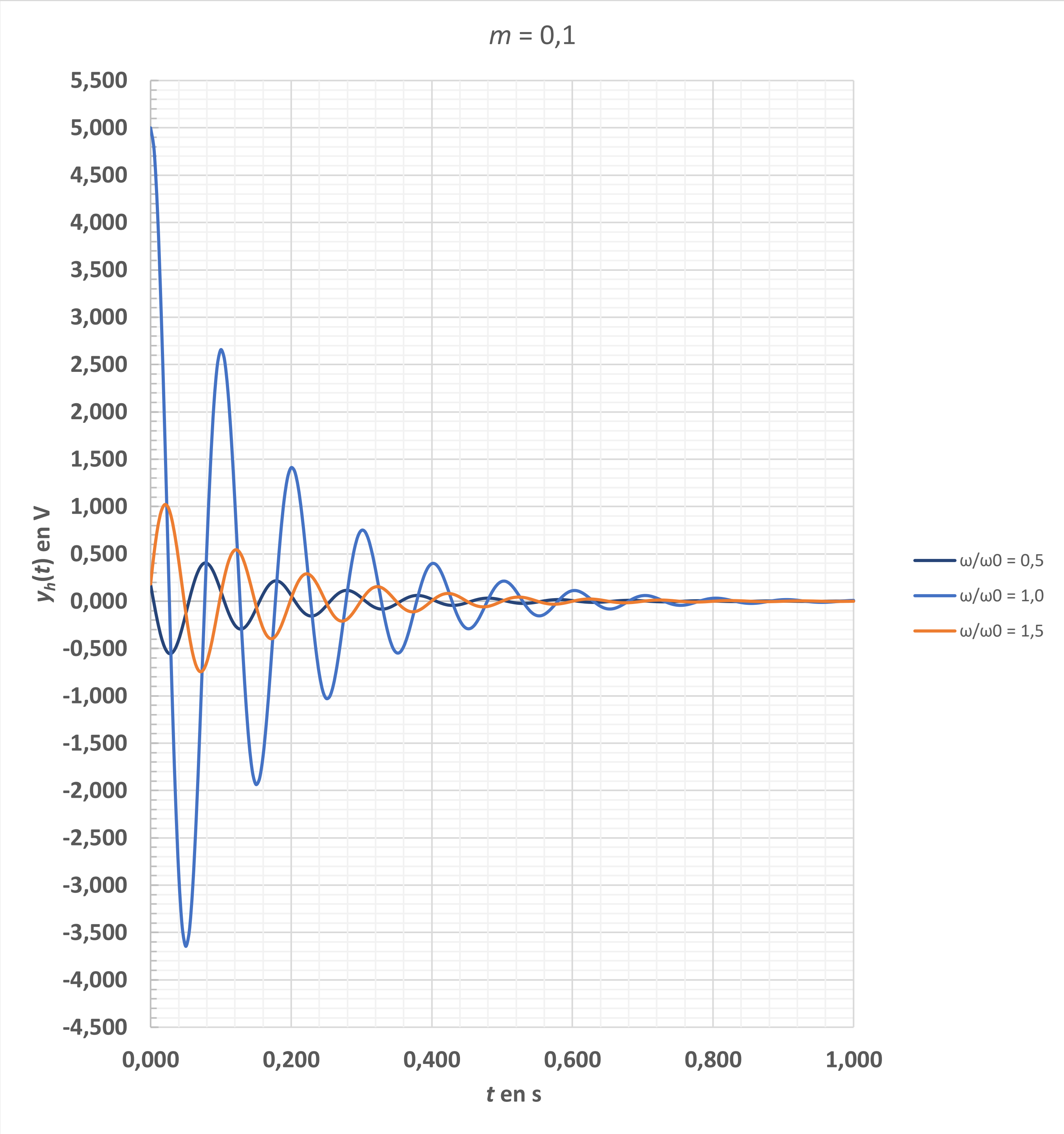
À $t = 3T_0$, $y_h(t) = y_h(3T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Le troisième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0{,}1$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0{,}175$ V ; $5{,}000$ V ; $0{,}182$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. La surtension est encore plus forte (5 V pour $\omega = \omega_0$) car maintenant le coefficient d'amortissement $m$ est dix fois plus petit que 1.

À $t = 10T_0$, $y_h(t) = y_h(10T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint. Ce temps s'allonge quand le coefficient d'amortissement diminue fortement en dessous de 1.

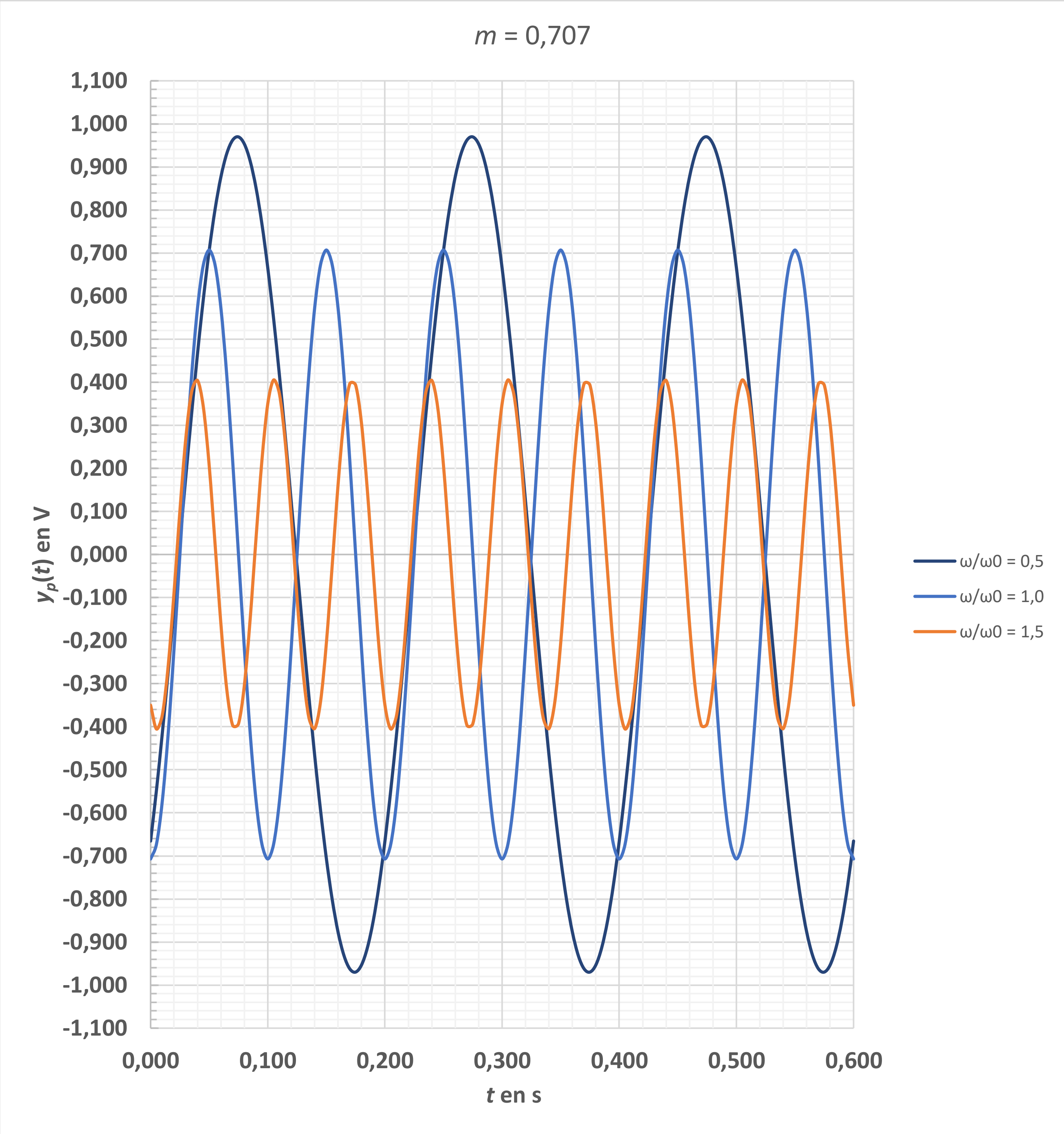


Les trois graphes suivants représentent la solution *particulière* $y_p(t)$.

Il s'agit donc du tracé sinusoïdal régulier attendu.

Le premier graphe ci-dessous correspond au cas $m = \sqrt{2}/2 \sim 0,707$.

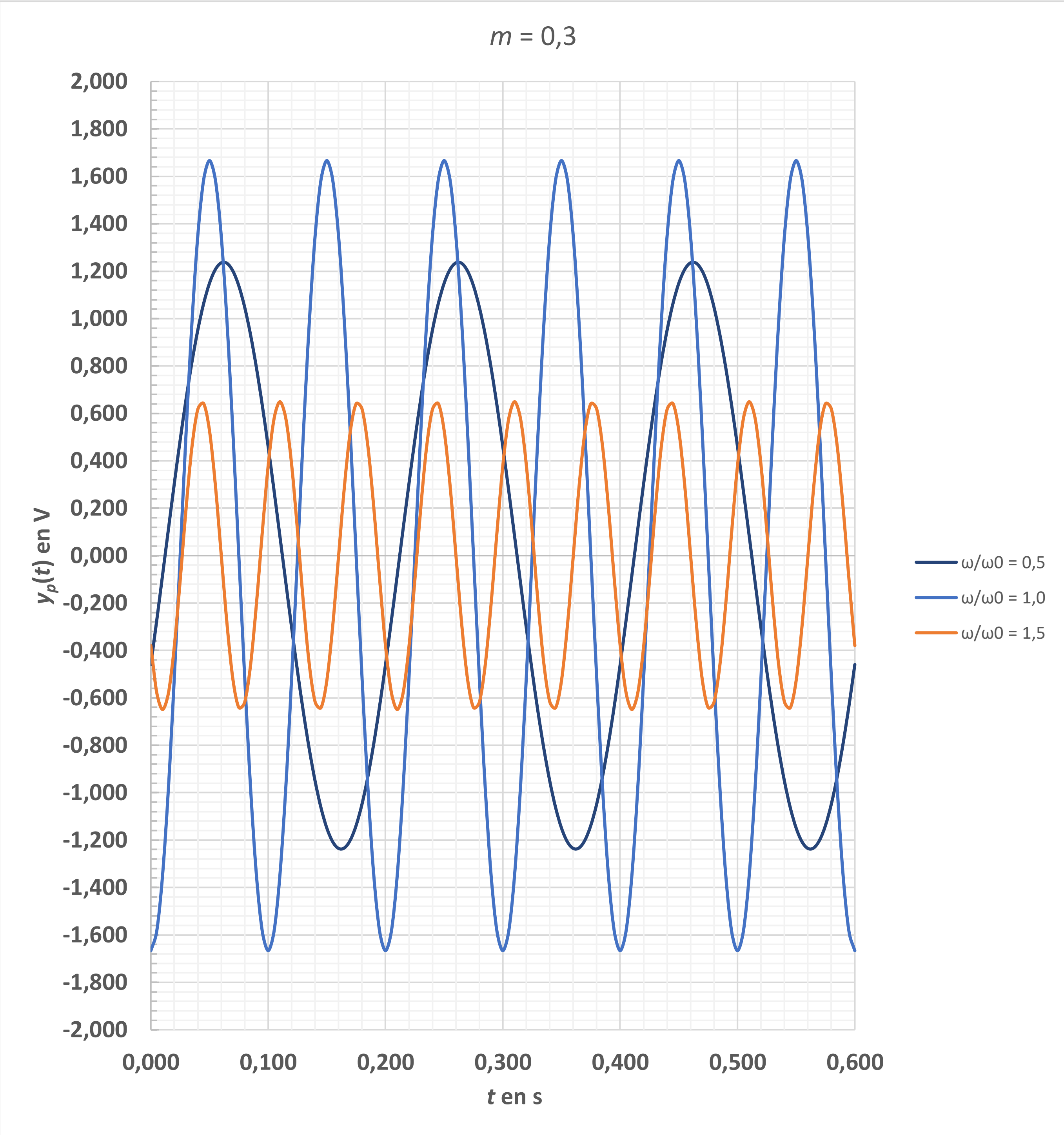
À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0,666$ V ; $-0,707$ V ; $-0,350$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$ !



Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0{,}3$.

Il s'agit donc toujours du tracé sinusoïdal régulier attendu.

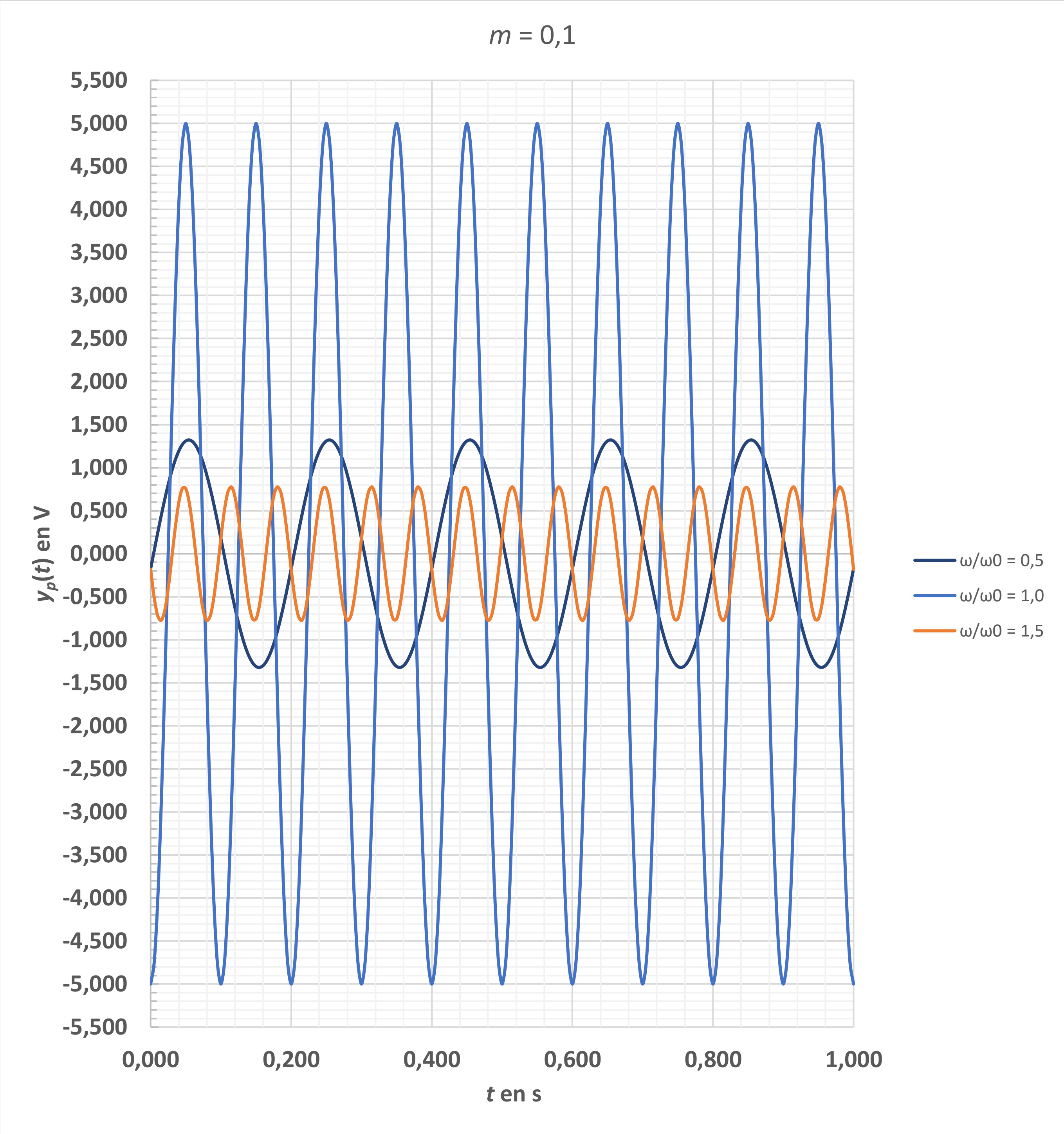
À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0{,}460$ V ; $-1{,}667$ V ; $-0{,}379$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$ !



Le troisième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0{,}1$.

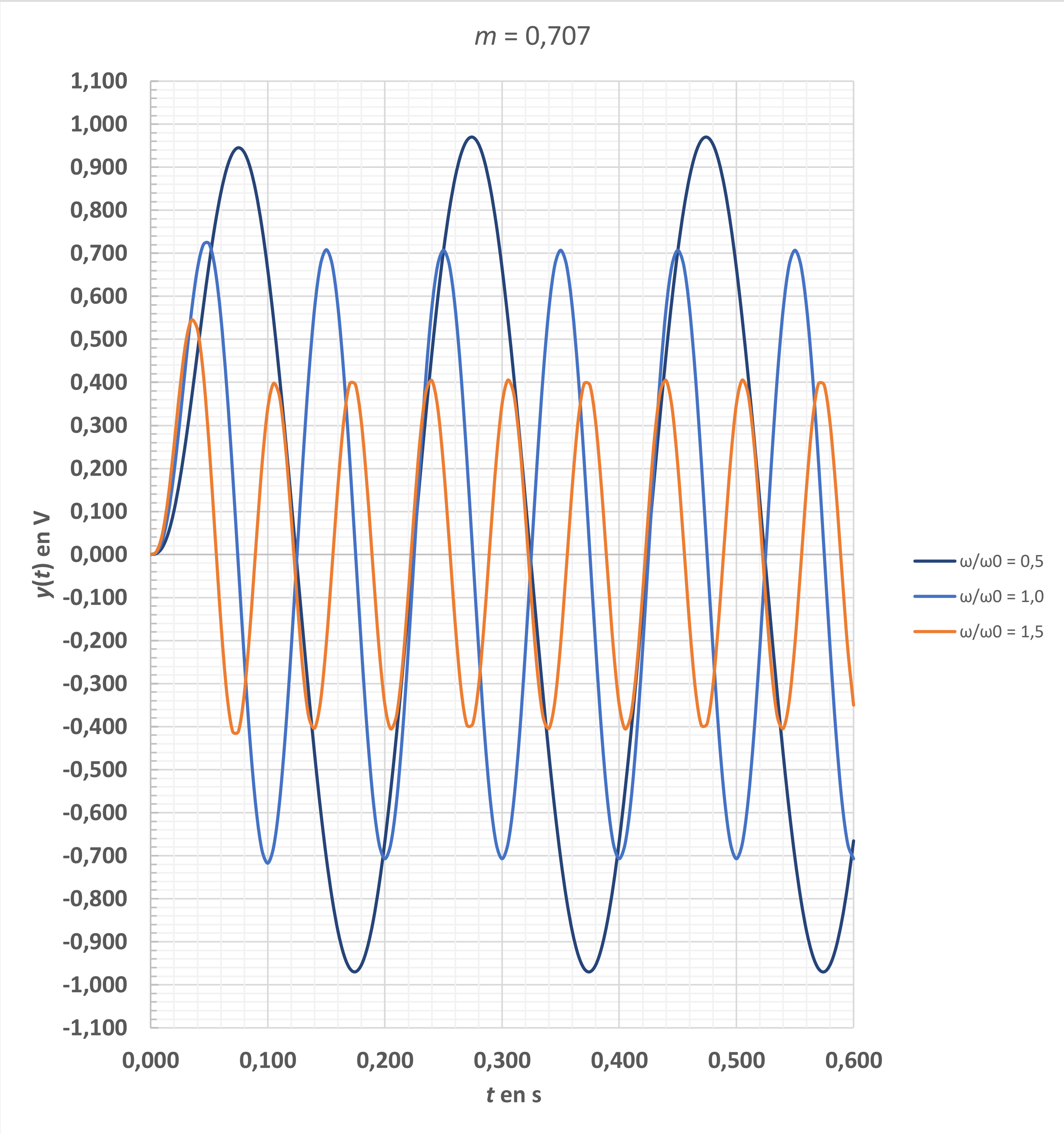
Il s'agit donc toujours du tracé sinusoïdal régulier attendu.

À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0{,}175$ V ; $-5{,}000$ V ; $-0{,}182$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$ !



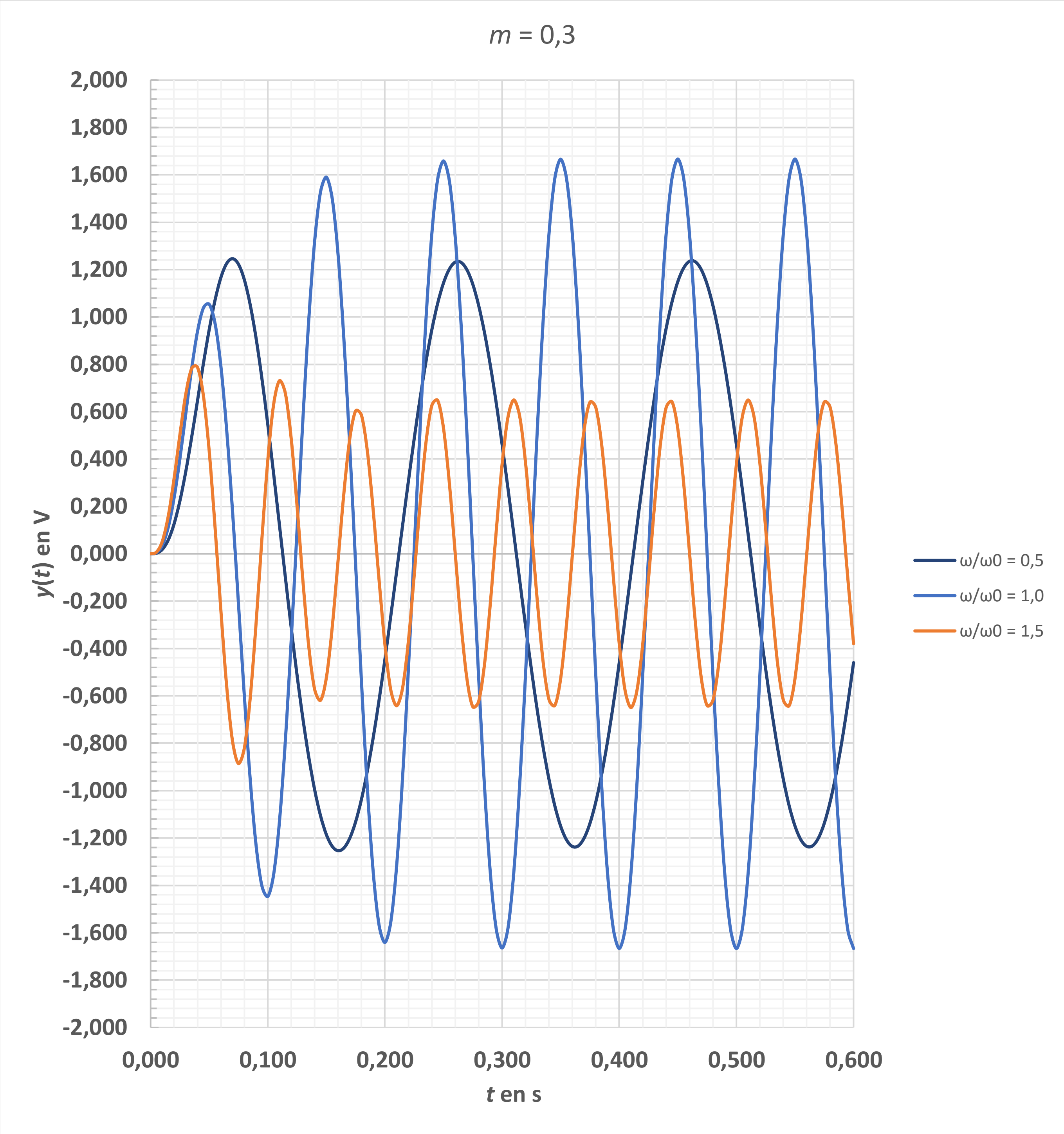
Les trois graphes suivants représentent la solution de l'équation différentielle $y(t)$ posée en (3).
Il s'agit donc de la somme $y_h(t)+y_p(t)$.

Le premier graphe ci-dessous correspond au cas $m=\sqrt{2}/2 \sim 0,707$.
À $t=0$ s, $y(t)=y(0)=0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



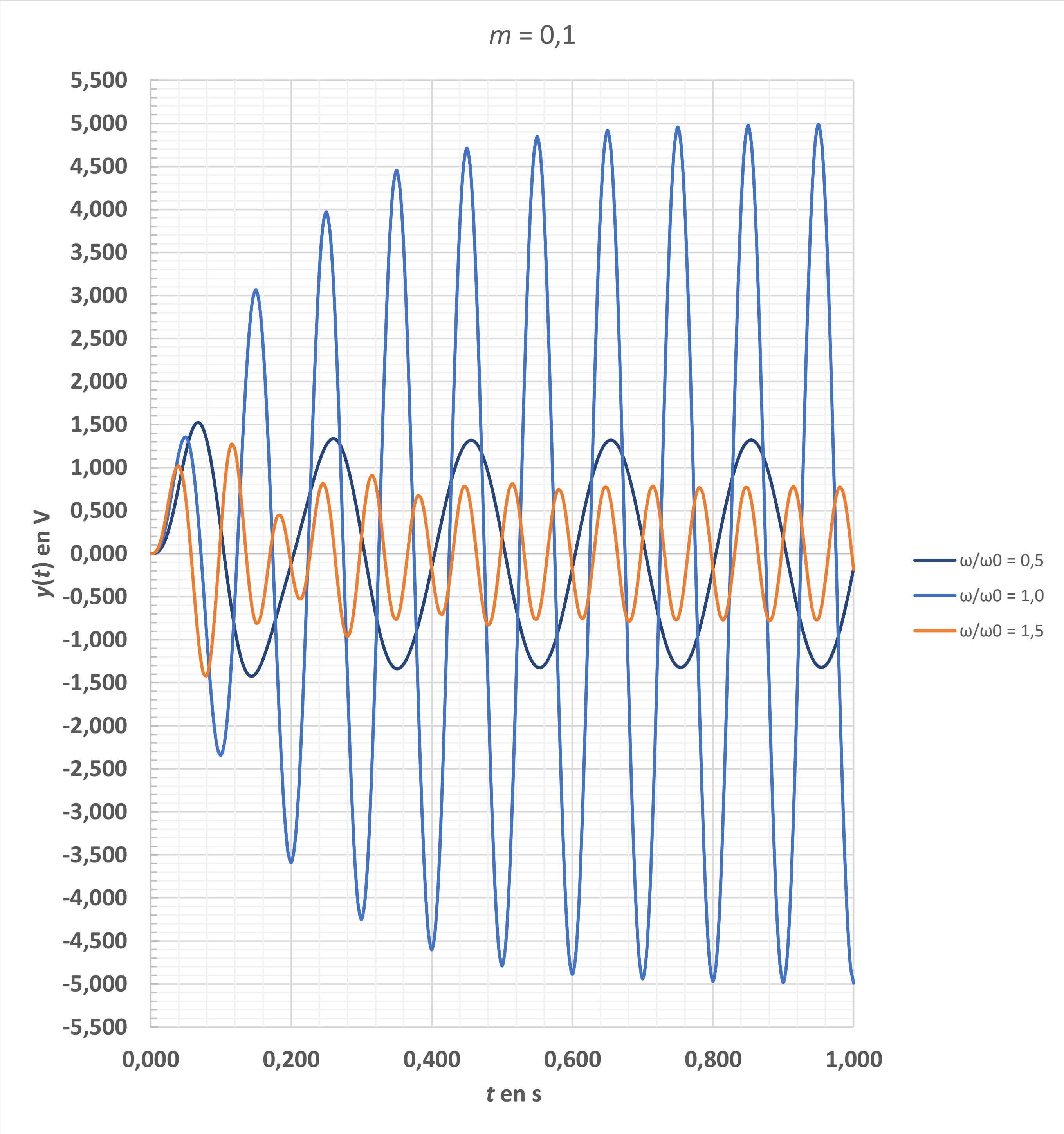
Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0{,}3$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0{,}1$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !




*Interprétation*

Même interprétation qu'au paragraphe *6.1*.

## 7. Synthèse des expressions

### 7.1 L'équation différentielle

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}+RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)=E\sin(\omega t)$$

ou

$$\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2m\frac{1}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)=E\sin(\omega t)$$

avec :

$$LC{\omega_0}^2=1 \qquad Q=\frac{L\omega_0}{R} \qquad m=\frac{1}{2Q}$$

$$K=\frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}E \qquad M=\frac{1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}E$$

### 7.2 En régime établi

$$y(t)\sim y_p(t)=K\cos(\omega t)+M\sin(\omega t)$$

ou

$$y(t)\sim y_p(t)=\sqrt{K^2+M^2}\sin(\omega t+\varphi)$$

avec :

$$\sin(\varphi)=\frac{K}{\sqrt{K^2+M^2}} \qquad \cos(\varphi)=\frac{M}{\sqrt{K^2+M^2}}$$

$\varphi=\text{atan2}(M;K)$, avec Excel.

- si $\omega<\omega_0$ => $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$

- si $\omega=\omega_0$ => $\varphi=-\frac{\pi}{2}$

- si $\omega>\omega_0$ => $-\pi<\varphi<-\frac{\pi}{2}$

$$\left|G(\omega)\right|=\frac{\sqrt{K^2+M^2}}{E}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}}$$

## 7.3 Quel que soit $t$ : régime transitoire suivi du régime établi

### *7.3.1 Premier cas : $m > 1$*

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + y_p(t)$$

avec :

$$r_1 = \left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0 \qquad r_2 = \left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0$$

$$\lambda = \frac{M\omega - r_2 K}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0} \qquad \mu = \frac{r_1 K - M\omega}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0}$$

### *7.3.2 Deuxième cas : $m = 1$*

$$y(t) = \left(\lambda t + \mu\right) e^{rt} + y_p(t)$$

Faire $m = 1$ dans les expressions de $K$ et $M$.

avec :

$$r = -\omega_0$$

$$\lambda = rK - M\omega \qquad \mu = -K$$

### *7.3.3 Troisième cas : $m < 1$*

$$y(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos\left(\beta t\right) + \mu e^{\alpha t} \sin\left(\beta t\right) + y_p(t)$$

avec :

$$\alpha = -m\omega_0 \qquad \beta = \sqrt{1 - m^2}\,\omega_0$$

$$\lambda = -K \qquad \mu = \frac{\alpha K - M\omega}{\beta}$$