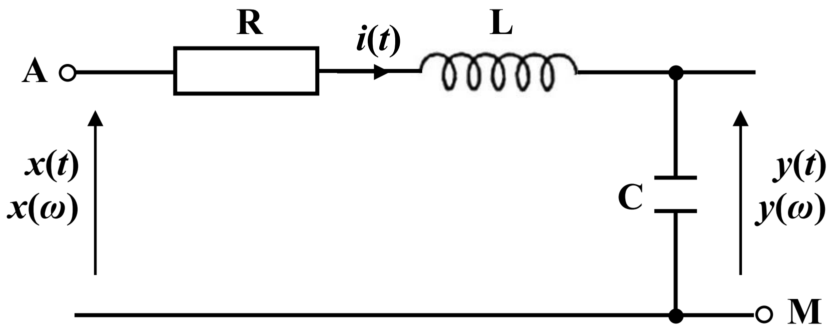
Filtres RLC, avec C en sortie

Partie 2. Filtre numérique

Section E. En utilisant la méthode des différences finies

Jean-Pierre Waymel, F5FOD
2 août 2025 v03



Résumé

Nous partirons de l'équation différentielle reliant la tension de sortie $y(t)$, ses deux dérivées successives et la tension d'entrée $x(t)$.

Après avoir fait quelques rappels sur la notion de dérivée, nous utiliserons l'approximation des différences finies afin d'élaborer l'équation d'un filtre numérique équivalent au filtre analogique RLC.

La validité de la méthode sera étudiée grâce à des simulations effectuées sur un tableur.
À cet effet, le signal d'entrée sera un signal sinusoïdal.

Les résultats seront comparés avec les résultats du filtre analogique RLC pour cinq valeurs caractéristiques du coefficient d'amortissement m :
- courbes de la tension de sortie en fonction du temps, y compris pendant le régime transitoire,
- courbes du gain en fonction de la fréquence.

Pulsations, fréquences et périodes

Pulsation, fréquence et période du signal d'entrée du filtre : $\omega = 2\pi f$ et $T = \dfrac{1}{f}$

Pulsation, fréquence et période de résonance du filtre LC : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

Fréquence et période d'échantillonnage : $Fs = \dfrac{1}{Ts}$

1. L'équation différentielle ($R \neq 0$ ohm)

Appliquons la loi d'Ohm entre A et M :

$$x(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t)$$

Aux bornes du condensateur :

$$dq = i(t)dt = Cdy(t) \quad => \quad i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) \quad => \quad LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (1)$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients réels et constants.

2. La mise sous forme canonique

Soit ω_0 la pulsation de résonance du circuit LC et Q son facteur de qualité :

$$LC{\omega_0}^2 = 1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Soit $m = \frac{1}{2Q}$, m étant le coefficient d'amortissement (avec $m \neq 0$ car $R \neq 0$ ohm).

Nous pouvons alors exprimer les produits LC et RC de la façon suivante :

$$LC = \frac{1}{{\omega_0}^2} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{Q}\frac{1}{\omega_0} = 2m\frac{1}{\omega_0}$$

L'expression (1) devient :

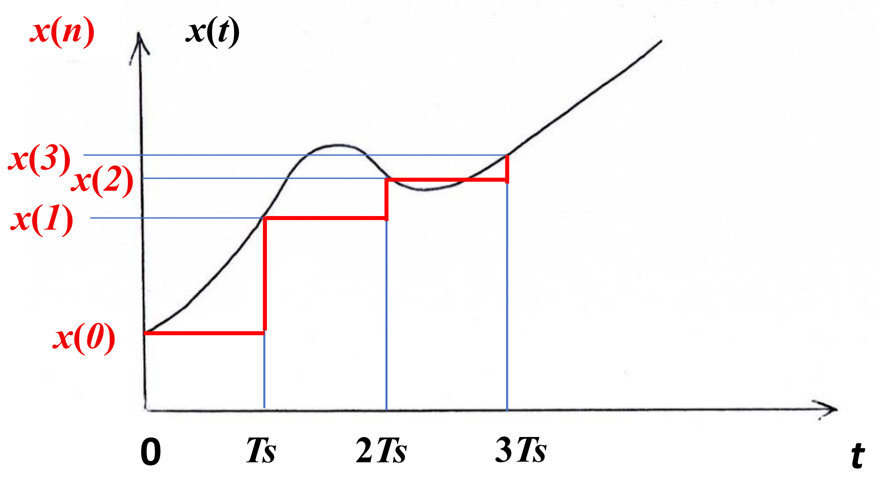
$$\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\frac{1}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (2)$$

3. L'échantillonnage et la numérisation

Prenons un signal d'entrée de forme quelconque $x(t)$: c'est la courbe en noir sur le graphe. Ce signal va être échantillonné puis numérisé à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique : c'est le tracé $x(n)$ en rouge.

Ts est la période d'échantillonnage :

$Ts = \frac{1}{Fs}$, Fs étant la fréquence d'échantillonnage.



Notation

n^o *de l'échantillon*	t	$x(n)$	$x(n)$
0	$0 \times Ts = 0$	$x(0)$	x_0
1	$1 \times Ts = Ts$	$x(1)$	x_1
2	$2 \times Ts = 2Ts$	$x(2)$	x_2
…	…	…	…
$n-1$	$(n-1) \times Ts = (n-1)Ts$	$x(n-1)$	x_{n-1}
n	$n \times Ts = nTs$	$x(n)$	x_n
…	…	…	…

Exemples

L'échantillon numéro 2 s'obtient au bout d'un temps égal à $2Ts$.
Pour cet échantillon, le signal d'entrée $x(t)$ sera noté $x(2Ts)$ ou plus simplement $x(2)$. Une autre notation possible utilise un indice : x_2.
De même l'échantillon numéro n obtenu au bout d'un temps égal à nTs sera noté $x(n)$ ou x_n, n étant un nombre entier positif ou nul.

4. Le filtre numérique

Le signal numérique $x(n)$ est maintenant appliqué à l'entrée d'un filtre numérique qui devra remplir les mêmes fonctions que le filtre analogique RLC.
À la sortie de ce filtre, le signal sera également numérique. Il ne s'appellera donc plus $y(t)$ mais $y(n)$.

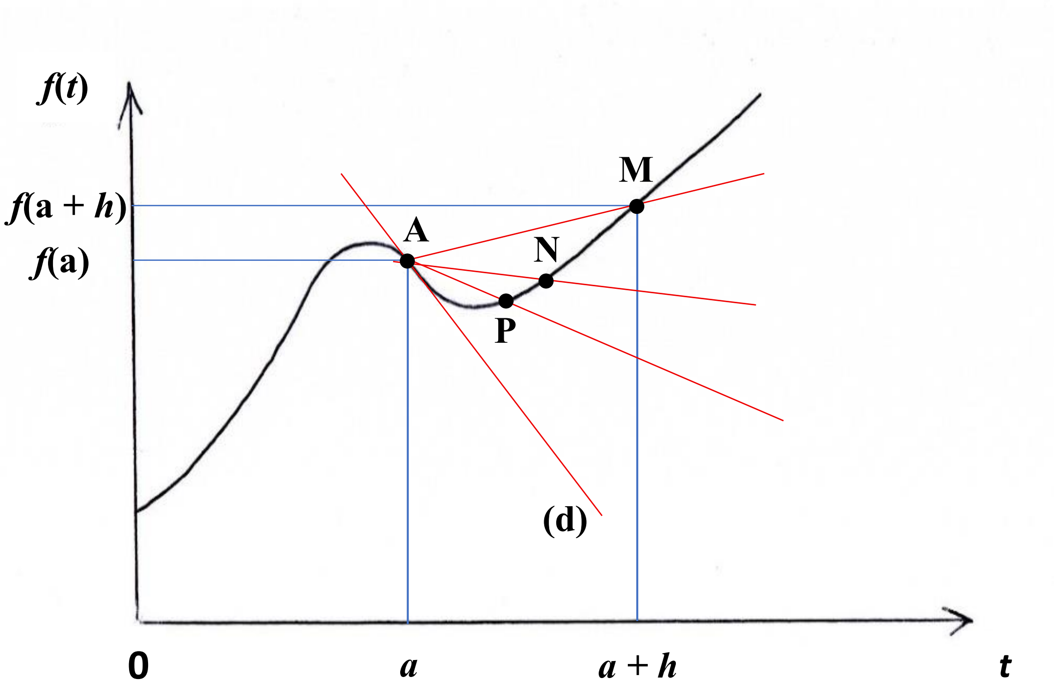
Il s'agit maintenant de calculer l'équation du filtre, c'est-à-dire l'équation qui donne $y(n)$ en fonction de $x(n)$.
Autrement dit, de transcrire l'équation différentielle « analogique » (2) dans le monde « numérique ».

5. Comment calculer une dérivée en numérique ?

5.1 Rappel sur les dérivées

Soit la fonction $f(t)$ de la variable t. Nous cherchons à évaluer la variation de $f(t)$ quand t varie.

Comme exemple, reprenons notre courbe noire, donc sans échantillonnage.



Intéressons-nous au point M :
abscisse $= a + h$
ordonnée $= f(a + h)$

et au point A :
abscisse $= a$
ordonnée $= f(a)$.

En allant de M à A, l'abscisse varie d'une quantité égale à $(a + h) - a = h$.
Et l'ordonnée de $f(a + h) - \mathrm{f}(a)$.
Le taux de variation est donc égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Rapprochons M de A jusqu'au point N, en suivant la courbe.
En connaissant les coordonnées de N (son abscisse et son ordonnée), nous pourrions calculer un nouveau taux de variation.
La droite MA est donc maintenant la droite NA puisque M est en N.

Positionnons M en P.
La droite MA est donc maintenant la droite PA puisque M est en P.

Finalement, quand M arrivera en A, la droite sera confondue avec la tangente à la courbe en A : la droite (d).

La pente de cette tangente est appelée « nombre dérivé de la fonction $f(t)$ en $t = a$ ». Appelons ce nombre $f'(a)$.

Mathématiquement :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quand h tend vers 0, M tend bien vers A.

Nous pourrions répéter ce calcul en tout point A de la courbe donc pour toute valeur de t. Nous obtiendrions la fonction dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$ par rapport à t :

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Remarquons que nous aurions tout aussi bien pu écrire :

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \qquad (3)$$

Autres notations :

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t)$$

<u>Exemple</u>

$$f(t) = t^2$$

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2th + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2t + h) = 2t$$

<u>5.2 En numérique, comment faire ?</u>

Nous ne pouvons plus parler d'un intervalle de temps h qui tendrait vers 0 ! Maintenant, cet intervalle de temps est égal à Ts, la période d'échantillonnage.

À la place de la dérivée $\frac{dy(t)}{dt}$ et donc de variations infinitésimales, nous devrons nous satisfaire du taux de variation entre deux échantillons successifs.

À la place de l'expression (3) $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t) - y(t-h)}{h}$, il nous faudra calculer :

$$\Delta_1(t) = \frac{\Delta y(n)}{\Delta(t)} = \frac{y(n) - y(n-1)}{Ts} = \frac{1}{Ts} y(n) - \frac{1}{Ts} y(n-1) \qquad (4)$$

De même à la place de la dérivée seconde $\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)}{dt}$, nous prendrons la variation de l'expression (4) :

$$\Delta_2 = \frac{\Delta[\Delta_1(t)]}{\Delta(t)} = \frac{\Delta\left[\frac{\Delta y(n)}{\Delta(t)}\right]}{Ts} = \frac{\Delta\left[\frac{1}{Ts}y(n) - \frac{1}{Ts}y(n-1)\right]}{Ts} = \frac{\Delta\left[\frac{1}{Ts}y(n)\right] - \Delta\left[\frac{1}{Ts}y(n-1)\right]}{Ts}$$

$$\Delta_2 = \frac{\frac{1}{Ts}\Delta[y(n)] - \frac{1}{Ts}\Delta[y(n-1)]}{Ts} = \frac{\Delta[y(n)] - \Delta[y(n-1)]}{Ts^2}$$

$$\Delta_2 = \frac{y(n) - y(n-1) - [y(n-1) - y(n-2)]}{Ts^2} = \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{Ts^2}$$

En résumé, nous allons faire les approximations suivantes dites « approximations des différences finies » :

$$\frac{dy(t)}{dt} \sim \Delta_1 = \frac{y(n) - y(n-1)}{Ts}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \sim \Delta_2 = \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{Ts^2}$$

« Différences finies » car nous utilisons *Ts* qui est une variation <u>finie</u> du temps *t* à la place de *dt* qui est une variation infiniment petite de ce temps.

6. L'équation du filtre

Dans l'expression (2), faisons donc cette approximation des différences finies :

$$\frac{1}{\omega_0^2 Ts^2}[y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)] + 2m\frac{1}{\omega_0 Ts}[y(n) - y(n-1)] + y(n) = x(n)$$

Ordonnons :

$$\left[\frac{1}{\omega_0^2 Ts^2} + 2m\frac{1}{\omega_0 Ts} + 1\right]y(n) + \left[-\frac{2}{\omega_0^2 Ts^2} - 2m\frac{1}{\omega_0 Ts}\right]y(n-1) + \frac{1}{\omega_0^2 Ts^2}y(n-2) = x(n)$$

C'est $y(n)$ que l'on recherche :

$$\left[\frac{1}{\omega_0^2 Ts^2} + 2m\frac{1}{\omega_0 Ts} + 1\right]y(n) = x(n) - \left[-\frac{2}{\omega_0^2 Ts^2} - 2m\frac{1}{\omega_0 Ts}\right]y(n-1) - \frac{1}{\omega_0^2 Ts^2}y(n-2)$$

Posons :

$$D = \frac{1}{\omega_0^2 Ts^2} + 2m\frac{1}{\omega_0 Ts} + 1$$

Par conséquent :

$$y(n)=\frac{1}{D}x(n)-\frac{-\frac{2}{\omega_0{}^2Ts^2}-2m\frac{1}{\omega_0 Ts}}{D}y(n-1)-\frac{\frac{1}{\omega_0{}^2Ts^2}}{D}y(n-2)$$

Nous obtenons enfin l'équation donnant $y(n)$:

$$y(n)=b_0x(n)-a_1y(n-1)-a_2y(n-2) \qquad (5)$$

avec :

$$D=\frac{1}{\omega_0{}^2Ts^2}+2m\frac{1}{\omega_0 Ts}+1$$

$$b_0=\frac{1}{D} \qquad a_1=\frac{-2\frac{1}{\omega_0{}^2Ts^2}-2m\frac{1}{\omega_0 Ts}}{D} \qquad a_2=\frac{\frac{1}{\omega_0{}^2Ts^2}}{D}$$

La valeur $y(n)$ de l'échantillon n en sortie du filtre se calcule donc en fonction :
- de la valeur de l'échantillon n en entrée soit $x(n)$ et
- des valeurs des deux échantillons précédents en sortie soit $y(n-1)$ et $y(n-2)$.

Ce type de filtre est appelé « filtre récursif » ou « filtre à réponse impulsionnelle infinie » (filtre RII) car sa réponse dépend des valeurs des anciennes sorties.

Les coefficients b_0, a_1 et a_2 sont reliés par la relation suivante :

$$b_0-a_1-a_2=1$$

Cette relation reste vraie pour toute équation différentielle de la forme suivante :

$$A\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

où A et B sont des nombres réels non nuls.

7. Retour sur les résultats concernant le filtre analogique

7.1 Notations

La résolution rigoureuse de l'équation différentielle (2) est entièrement décrite ici :
https://www.f5kee.fr/partie-1-section-b/

Signal d'entrée : $x(t)=E\sin(\omega t)$

Conditions initiales à t = 0 :

$y(t) = y(0) = 0$ V

$i(t) = i(0) = 0$ A

Remarquons que $x(0) = 0$ V.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$K=\frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}E \qquad M=\frac{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}E$$

et :

$$y_p(t)=K\cos(\omega t)+M\sin(\omega t)$$

La résolution de l'équation différentielle fait apparaître trois cas selon la valeur du coefficient d'amortissement *m*.

7.2 Premier cas : m > 1, régime apériodique

$$y(t)=\lambda e^{r_1t}+\mu e^{r_2t}+y_p(t)$$

avec :

$$r_1=\left(-m-\sqrt{m^2-1}\right)\omega_0 \qquad r_2=\left(-m+\sqrt{m^2-1}\right)\omega_0$$

$$\lambda=\frac{M\omega-r_2K}{\left(2\sqrt{m^2-1}\right)\omega_0} \qquad \mu=\frac{r_1K-M\omega}{\left(2\sqrt{m^2-1}\right)\omega_0}$$

7.3 Deuxième cas : m = 1, régime critique

$$y(t)=(\lambda t+\mu)e^{rt}+y_p(t)$$

avec :

$$r=-\omega_0$$

$$\lambda=rK-M\omega \qquad \mu=-K$$

7.4 Troisième cas : 0 < m < 1, régime oscillant

$$y(t)=\lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t)+\mu e^{\alpha t}\sin(\beta t)+y_p(t)$$

avec :

$$\alpha=-m\omega_0 \qquad \beta=\sqrt{1-m^2}\,\omega_0$$

$$\lambda=-K \qquad \mu=\frac{\alpha K-M\omega}{\beta}$$

Le calcul utilisant les impédances complexes est quant à lui entièrement décrit ici : https://www.f5kee.fr/partie-1-section-a/

Quelle que soit la valeur de m, il ne permet pas de tenir compte du régime transitoire à partir de $t = 0$. Par contre, il montre que pour $m < \sqrt{2}/2$, le gain dépasse 0 dB à cause de la surtension due au circuit LC.

8. Comparaison des structures de solution entre filtre analogique et filtre numérique

8.1 En analogique

Nous obtenons trois structures de solution différentes selon la valeur de m par rapport à 1. Pour un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation ω :

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t)$$

$$y(t) = \left(\lambda t + \mu\right)e^{rt} + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t)$$

$$y(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + \mu e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right) + K\cos(\omega t) + M\sin(\omega t)$$

Les coefficients de ces expressions dépendent de m et ω_0. Mais K, M, λ et μ dépendent aussi de ω, la pulsation du signal d'entrée !

Par ailleurs, si le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, il faudra reprendre une partie de la résolution de l'équation différentielle de départ car son « second membre » ne sera plus le même.

8.2 En numérique, avec l'approximation des différences finies

Une seule structure quelle que soit la valeur de m :

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

Les coefficients b_0, a_1 et a_2 dépendent de m, ω_0 et Ts mais surtout ils ne dépendent pas du signal d'entrée ! Autrement dit, si l'on modifie la structure de ce signal d'entrée, l'expression reste inchangée et il n'y a aucun calcul à refaire !

Nous en verrons deux exemples en annexes.

9. Filtre numérique : simulation pratique avec Excel

$f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ =10 Hz soit par exemple $L \sim 2{,}533$ H et $C \sim 100$ µF.

$$R = 2mL\omega_0$$

m	2	1	$\sqrt{2}/2$	0,3	0,1
R (Ω)	636,6	318,3	225,1	95,5	31,8

Les valeurs de R, L et C sont données pour le filtre analogique. Exemple purement théorique avec des composants parfaits !

Signal d'entrée : $x(t) = E\sin(\omega t)$, avec $E = 1$ V. Ou plutôt $x(n) = E\sin(\omega \times nTs)$.

$Ts = 0{,}0005$ s soit 100 fois plus petite que la demi-période $\dfrac{1}{2}T_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_0}$.

Avec $0 \text{ s} \le t \le 3 \text{ s}$, soit $0 \le n \le 6000$, c'est-à-dire 6001 échantillons !

Fréquences du signal d'entrée $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 Hz pour $m = 2$ et $m = 1$;
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 Hz pour $m = \sqrt{2}/2$, $m = 0{,}3$ et $m = 0{,}1$.

Les fichiers Excel sont disponibles sur simple demande.

Voici quelques exemples significatifs pour chacune de ces valeurs de m :

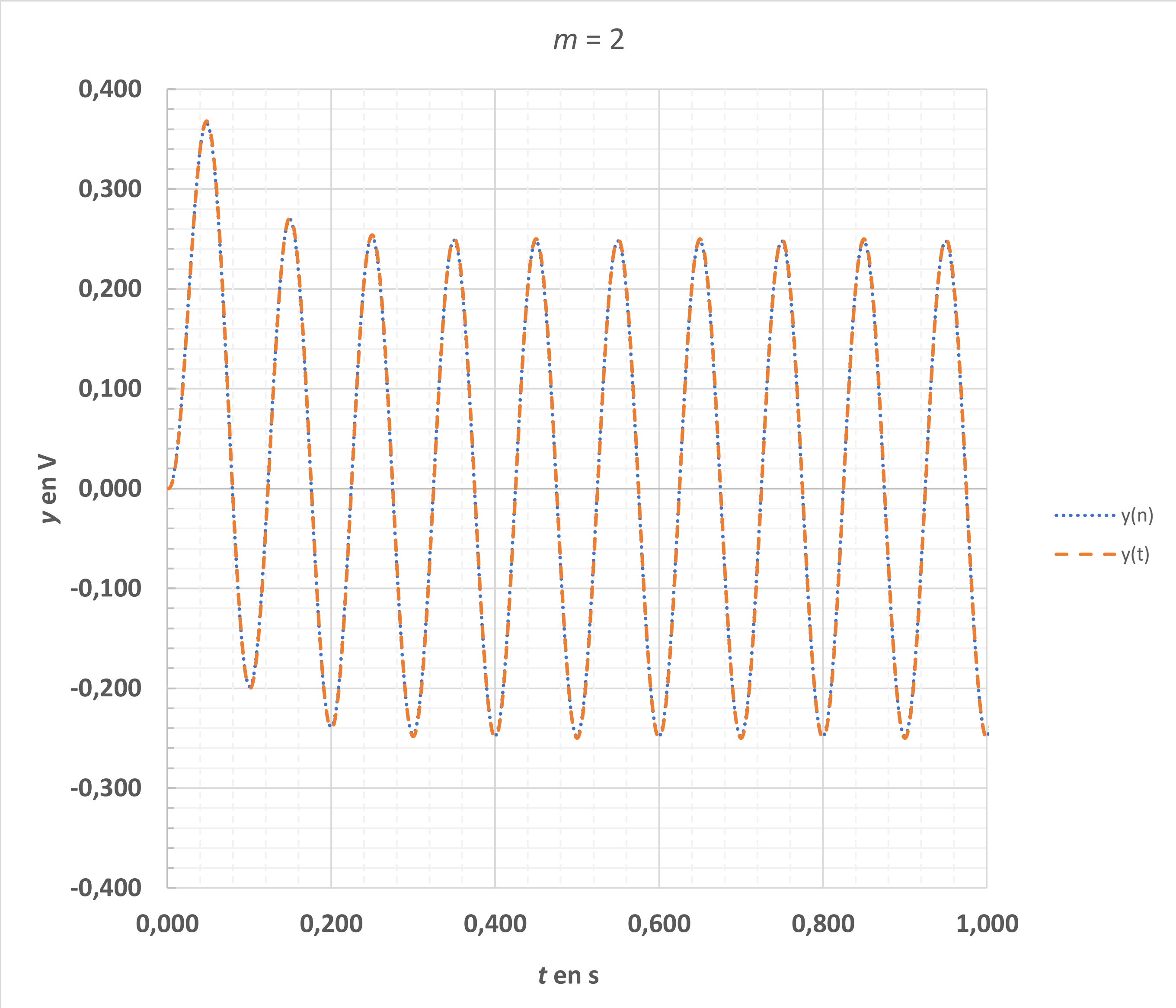
- graphe de la tension de sortie du filtre pour $\omega = \omega_0$, soit $f = f_0 = 10$ Hz ; remarquons que la tension crête peut être lue comme la valeur du gain car $E = 1$ volt (E est la tension crête du signal d'entrée du filtre).

Ce gain sera celui du régime établi : $G\_y(n)$ pour le filtre numérique avec approximation des différences finies et $G\_y(t)$ pour le filtre analogique. Il sera comparé à G_complexe, le gain calculé en utilisant les impédances complexes :

$$G\_\text{complexe} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right)^2 + 4m^2 \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}}} = \frac{1}{2m} \text{ dans le cas présent } (\omega = \omega_0)$$

Voir https://www.f5kee.fr/partie-1-section-a/ paragraphe 3.

- diagramme de Bode du gain du filtre numérique et du filtre analogique.

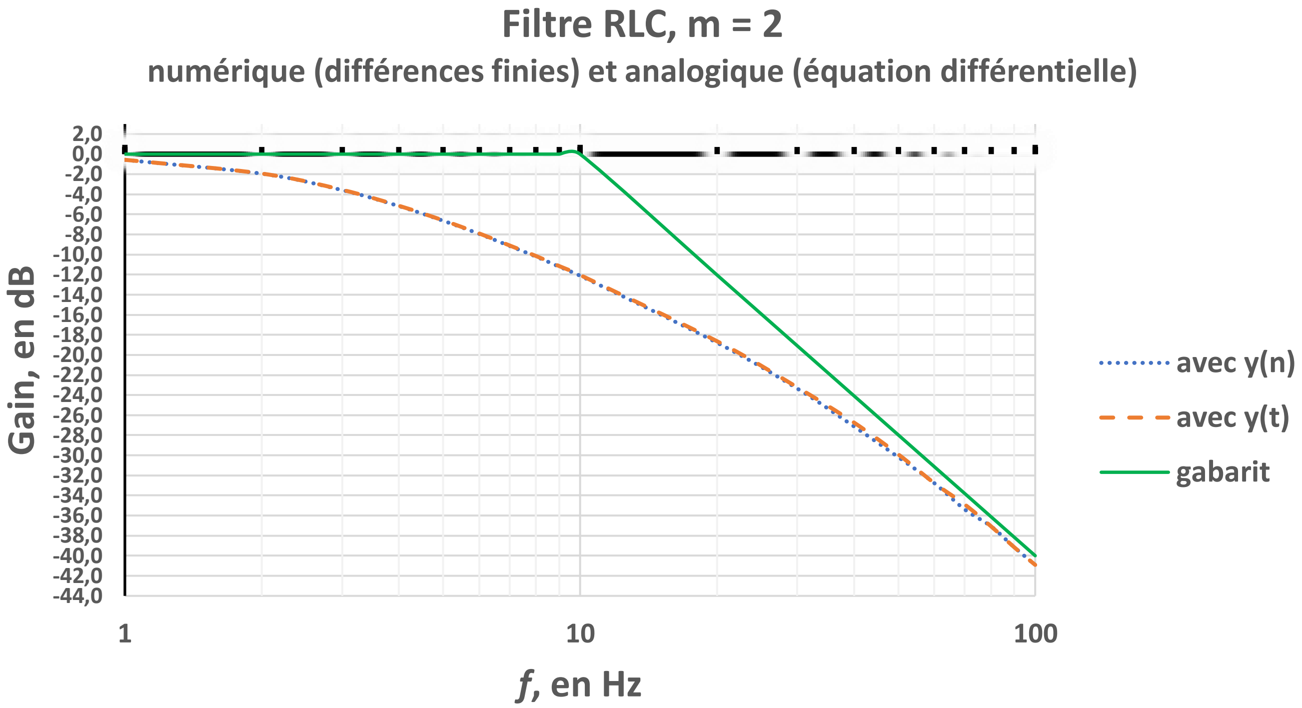


$G\_y(n) = 0{,}248\ (-12{,}11\text{ dB})$
$G\_y(t) = 0{,}250\ (-12{,}04\text{ dB})$
$G\_complexe = 0{,}250\ (-12{,}04\text{ dB})$

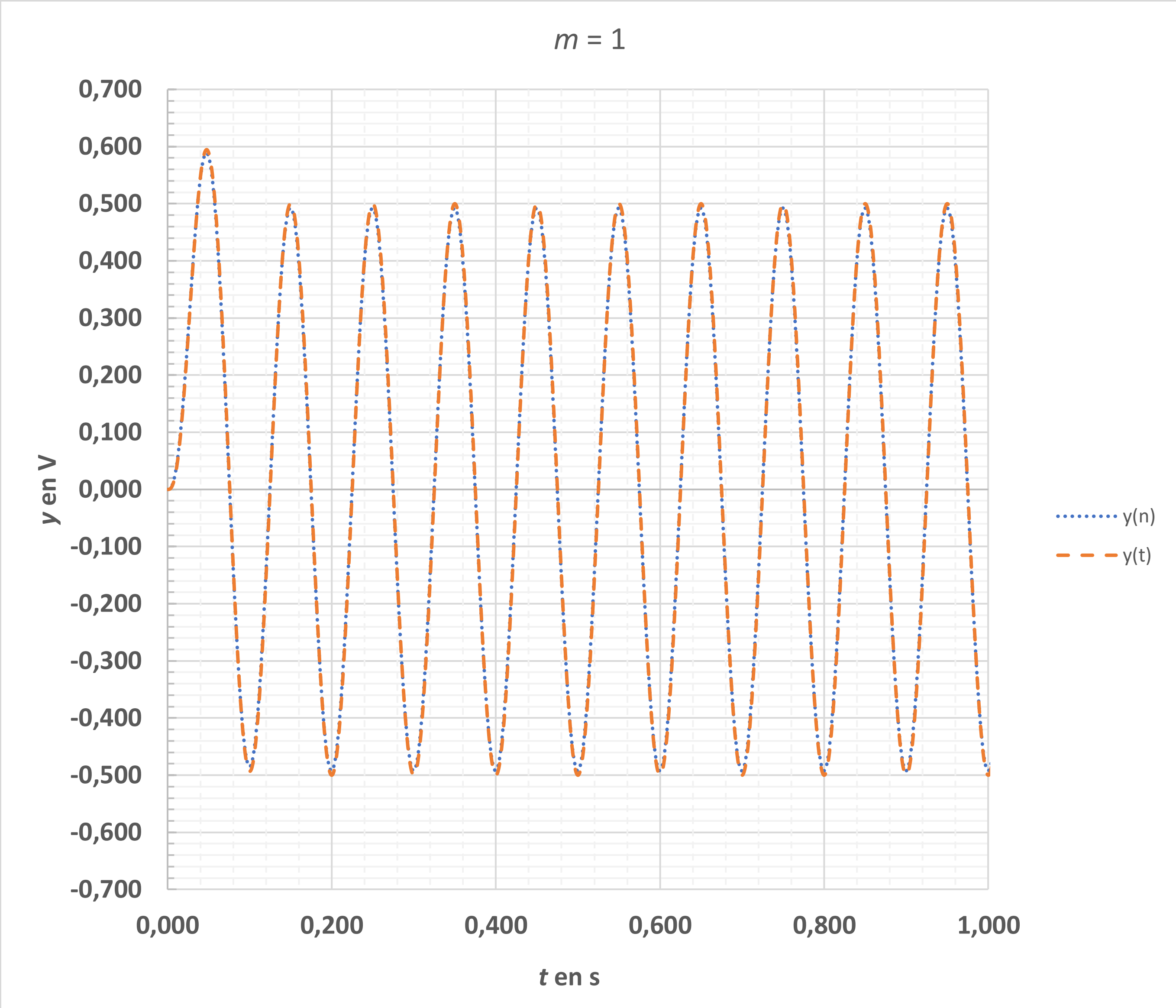
Le régime transitoire est clairement visible.
Les deux tensions $y(n)$ et $y(t)$ se superposent : l'équation du filtre numérique fonctionne !

$G\_y(n) = 0{,}992 G\_y(t)$

En dB : $G\_y(n) = G\_y(t) - 0{,}07$



Les deux diagrammes se superposent.

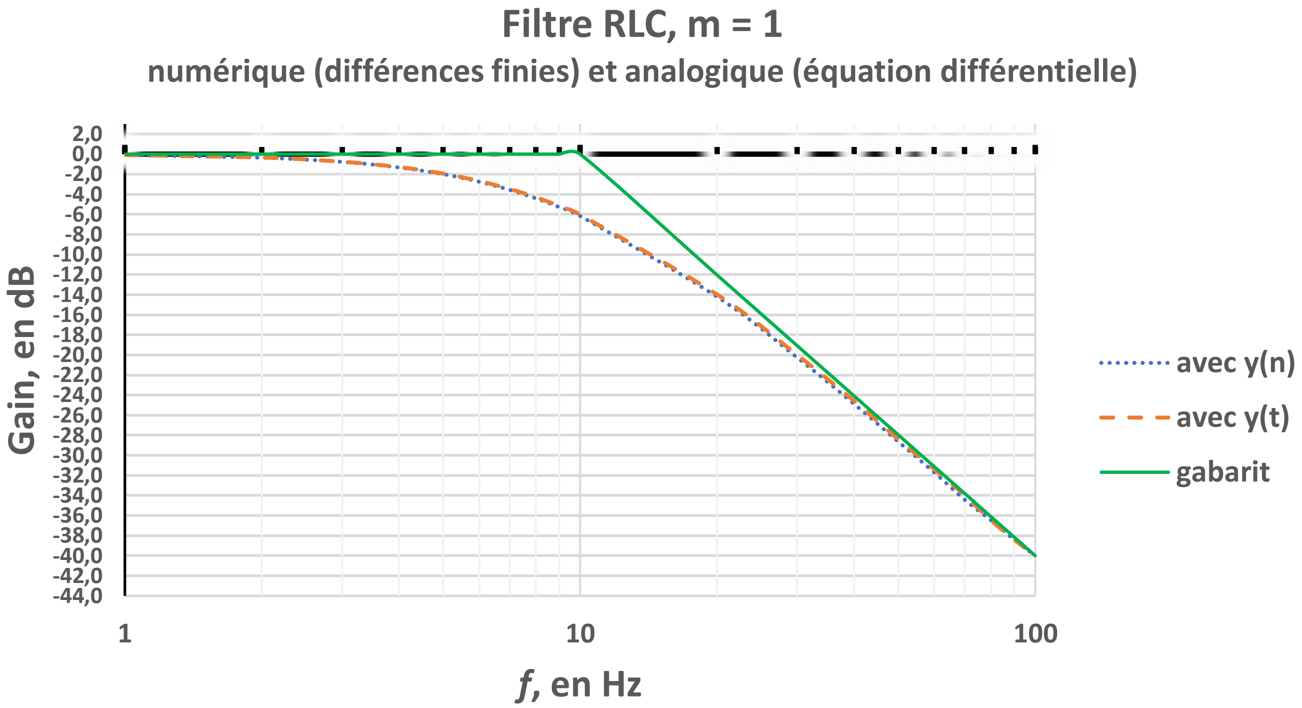


$G\_y(n)$ = 0,492 (−6,16 dB)
$G\_y(t)$ = 0,500 (−6,02 dB)
$G\_complexe$ = 0,500 (−6,02 dB)

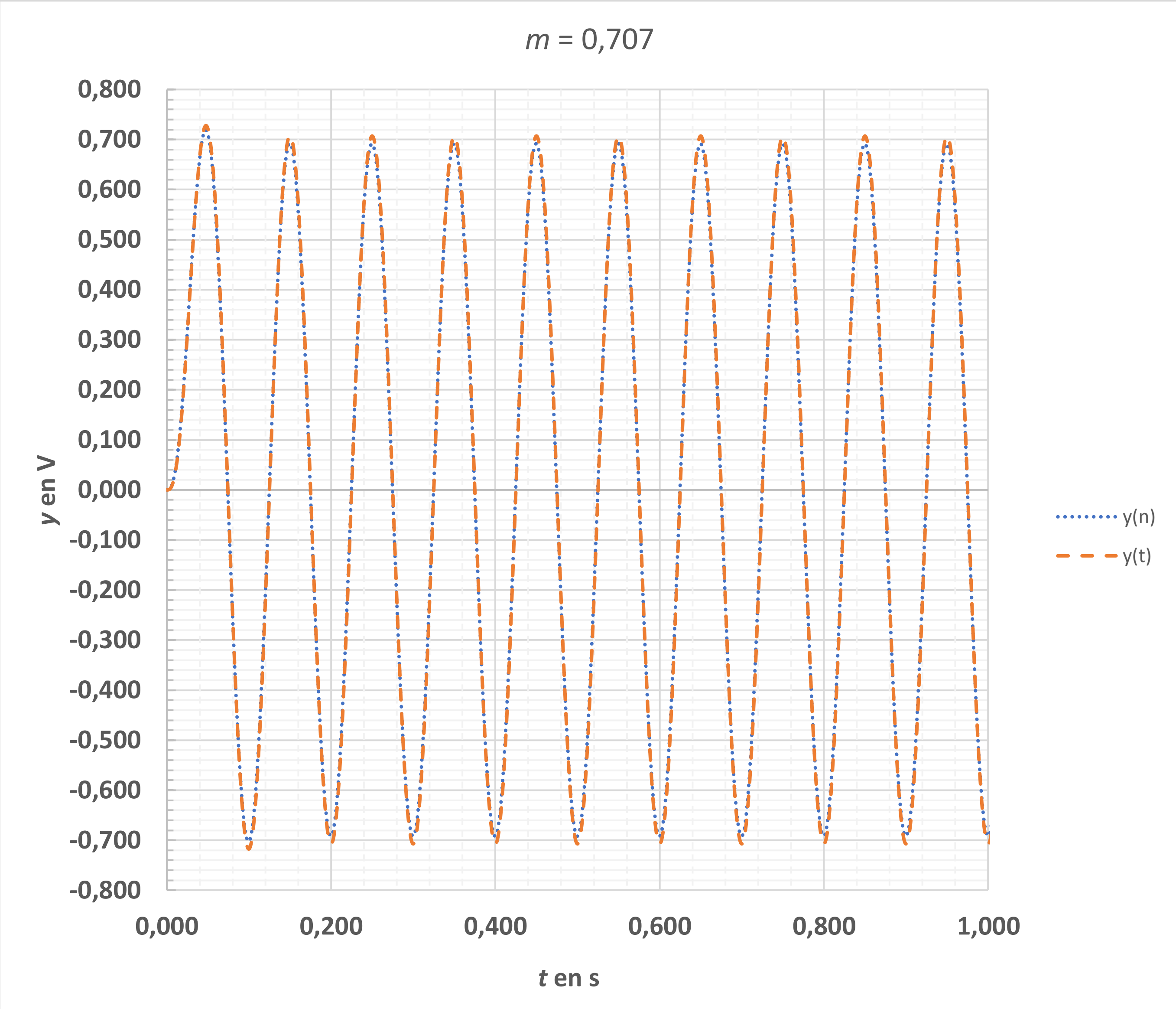
Le régime transitoire est clairement visible.
Les deux tensions $y(n)$ et $y(t)$ se superposent : l'équation du filtre numérique fonctionne !

$G\_y(n) = 0{,}984 G\_y(t)$

En dB : $G\_y(n) = G\_y(t) - 0{,}14$



Les deux diagrammes se superposent.

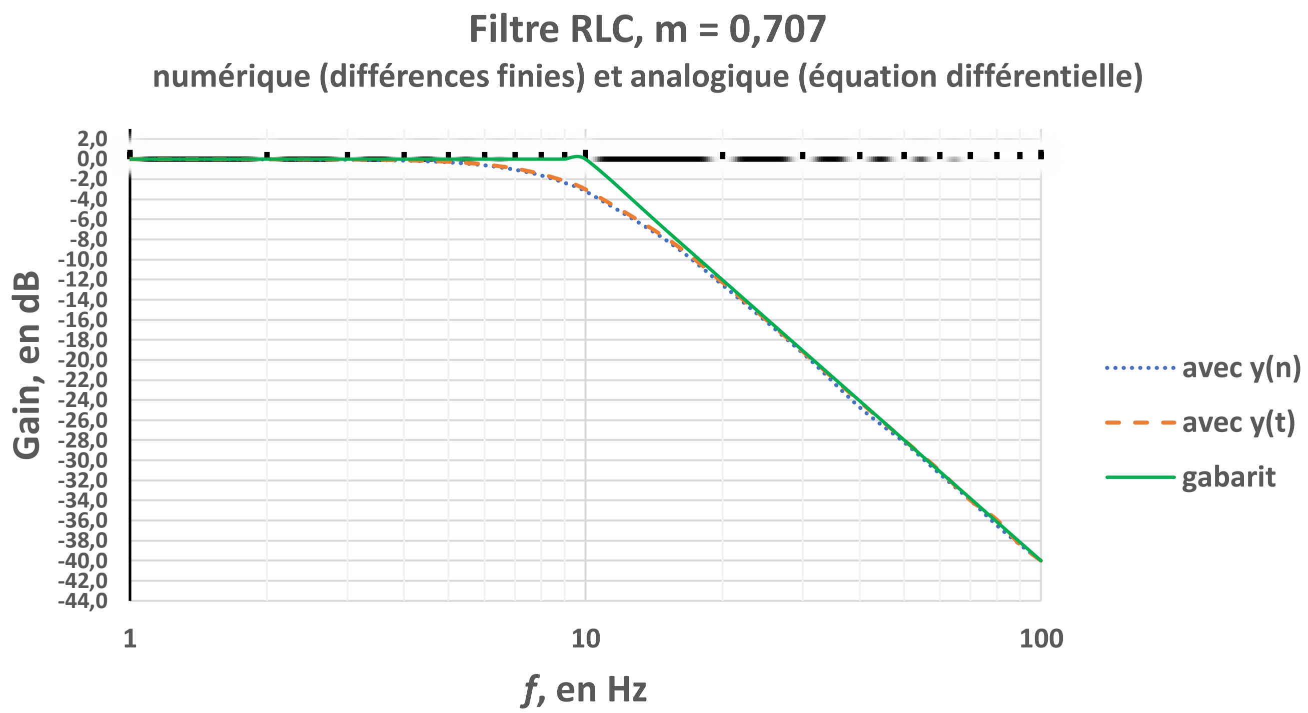


$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0,707$$

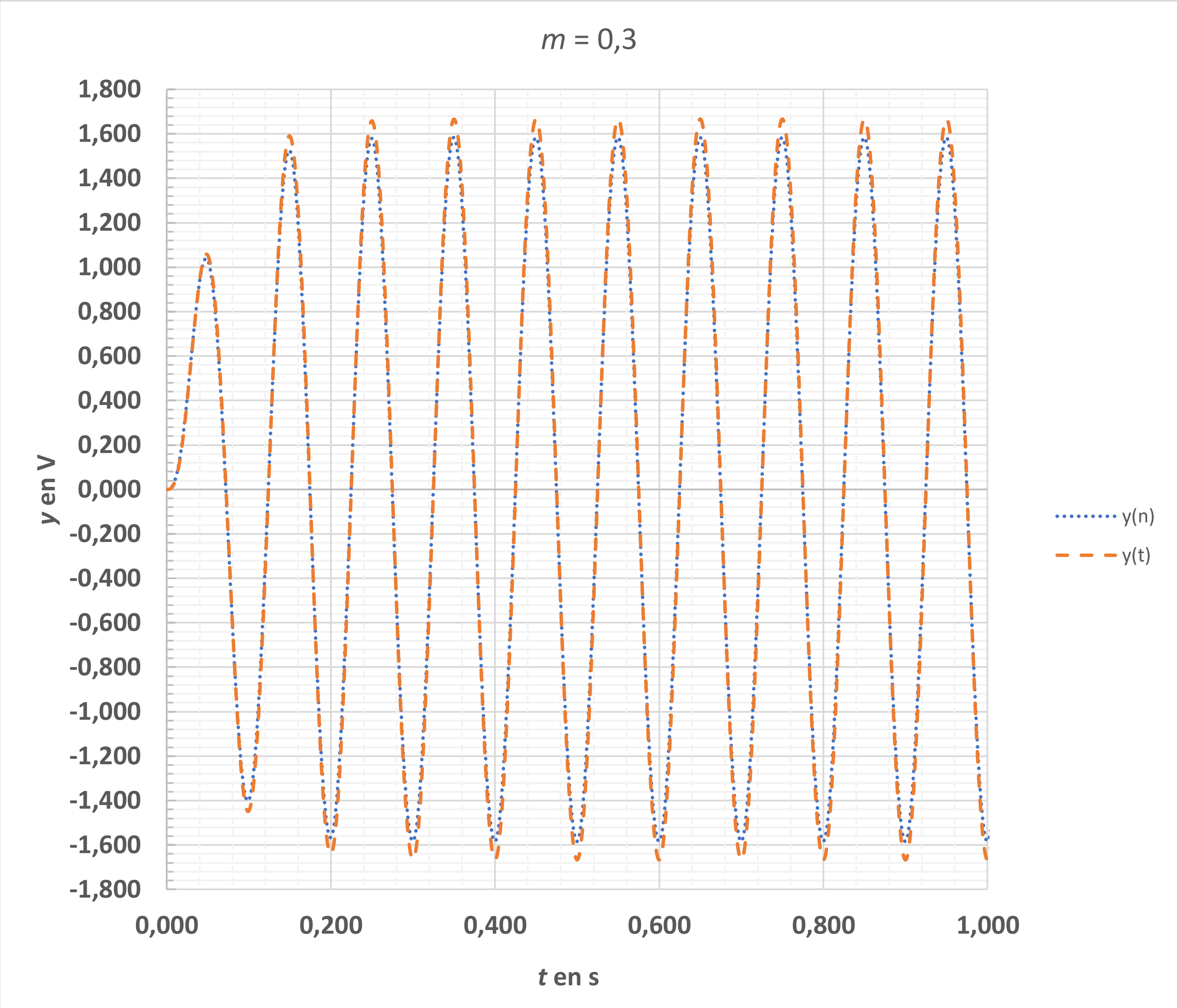
$G\_y(n) = 0,692$ ($-3,20$ dB)
$G\_y(t) = 0,707$ ($-3,01$ dB)
$G\_complexe = 0,707$ ($-3,01$ dB)

Le régime transitoire est clairement visible.
Les deux tensions $y(n)$ et $y(t)$ se superposent : l'équation du filtre numérique fonctionne !

$G\_y(n) = 0,979 G\_y(t)$
En dB : $G\_y(n) = G\_y(t) - 0,19$



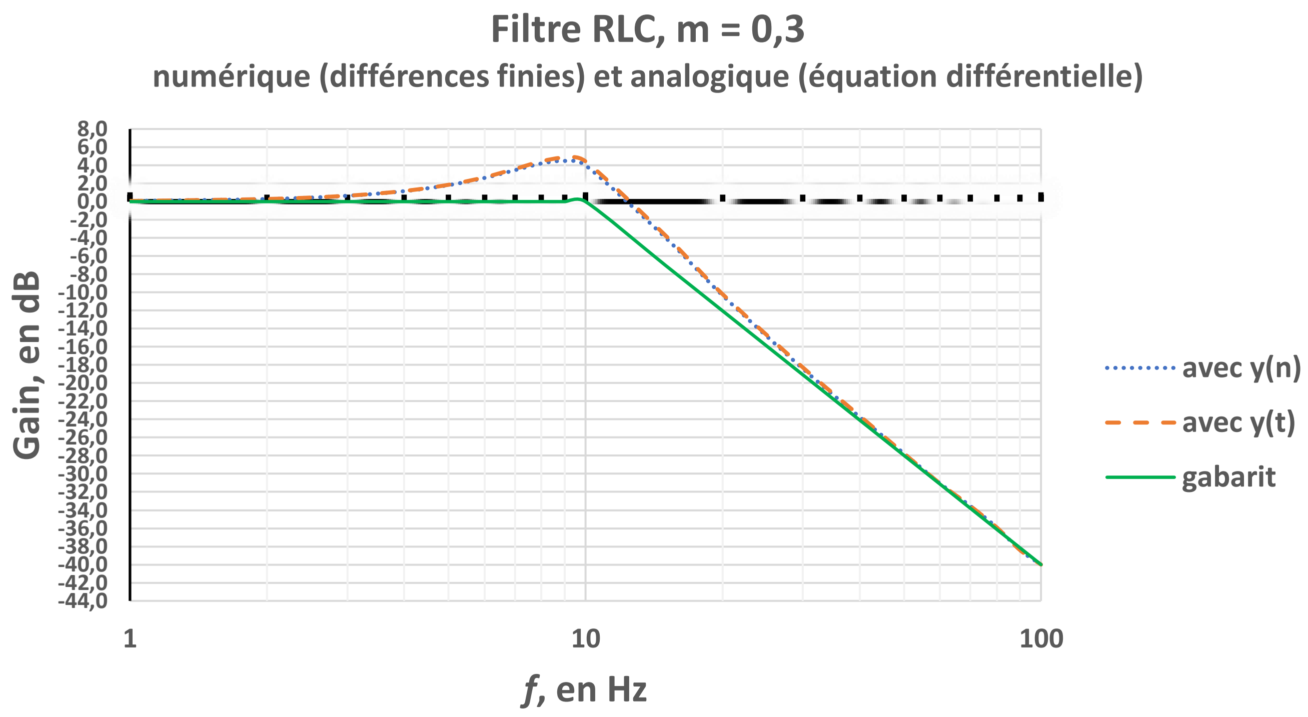
Les deux diagrammes se superposent.



$G\_y(n)$ = 1,584 (+4,00 dB)
$G\_y(t)$ = 1,667 (+4,44 dB)
$G\_complexe$ = 1,667 (+4,44 dB)

Le régime transitoire est clairement visible.
Les deux tensions $y(n)$ et $y(t)$ se superposent : l'équation du filtre numérique fonctionne !

$G\_y(n) = 0{,}950 G\_y(t)$
En dB : $G\_y(n) = G\_y(t) - 0{,}44$
Néanmoins, le gain « numérique » perd 0,44 dB.



Les deux diagrammes se superposent, avec un léger écart au maximum du gain.

Quand $m < \sqrt{2}/2$, le gain $G\_y(t)$ présente un maximum $G\_complexe\text{-}max$ à la fréquence d'entrée f_max :

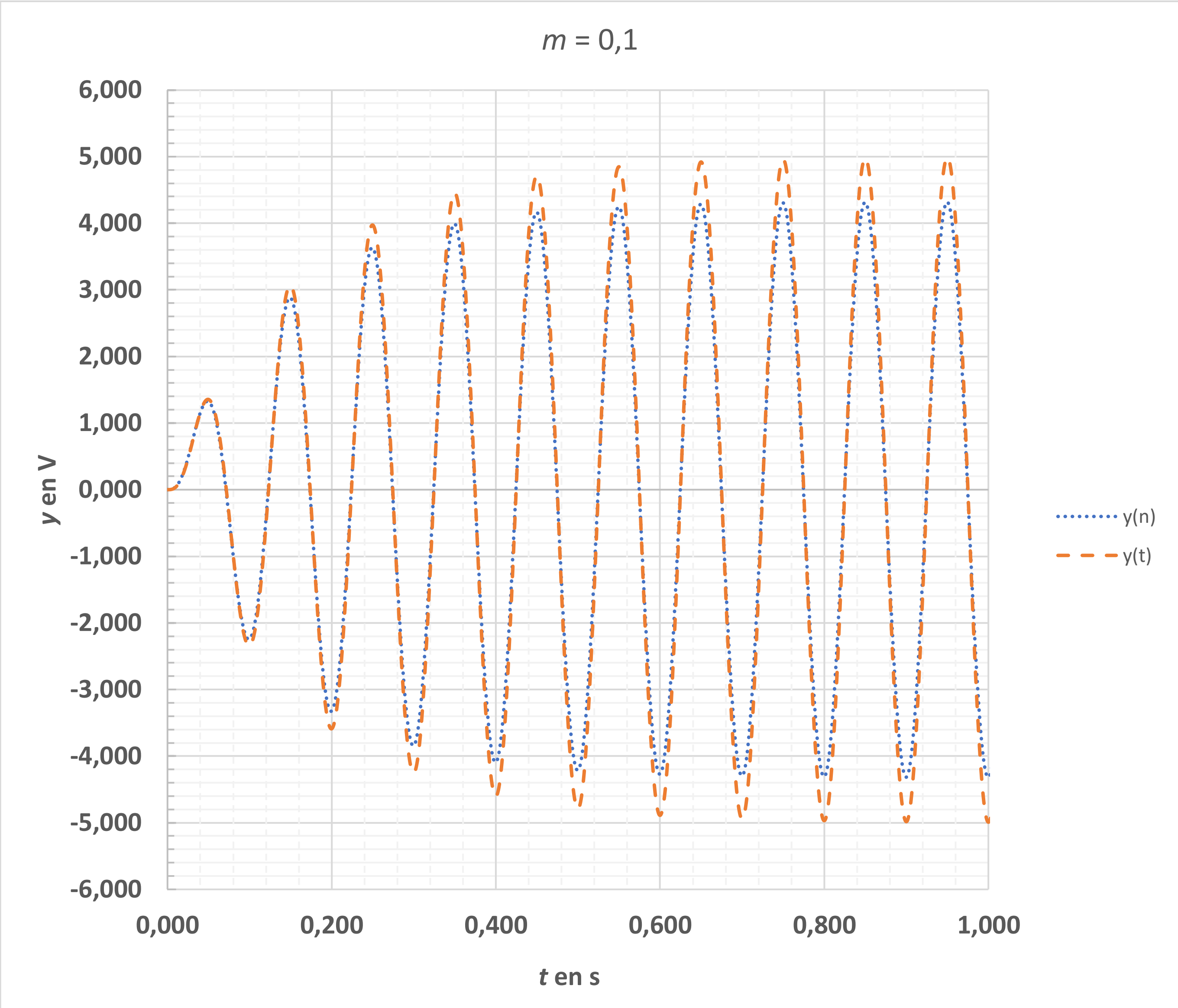
$$f\_max = f_0\sqrt{1-2m^2} \qquad G\_complexe\text{-}max = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

voir https://www.f5kee.fr/partie-1-section-a/ paragraphe 6.

f_max = 9,06 Hz
$G\_y(n)\_max$ = 1,675 (+4,48 dB)
$G\_y(t)\_max$ = 1,747 (+4,85 dB)
$G\_complexe\text{-}max$ = 1,747 (+4,85 dB)

$G\_y(n)\_max = 0{,}959 G\_y(t)\_max$
En dB : $G\_y(n)\_max = G\_y(t)\_max - 0{,}37$

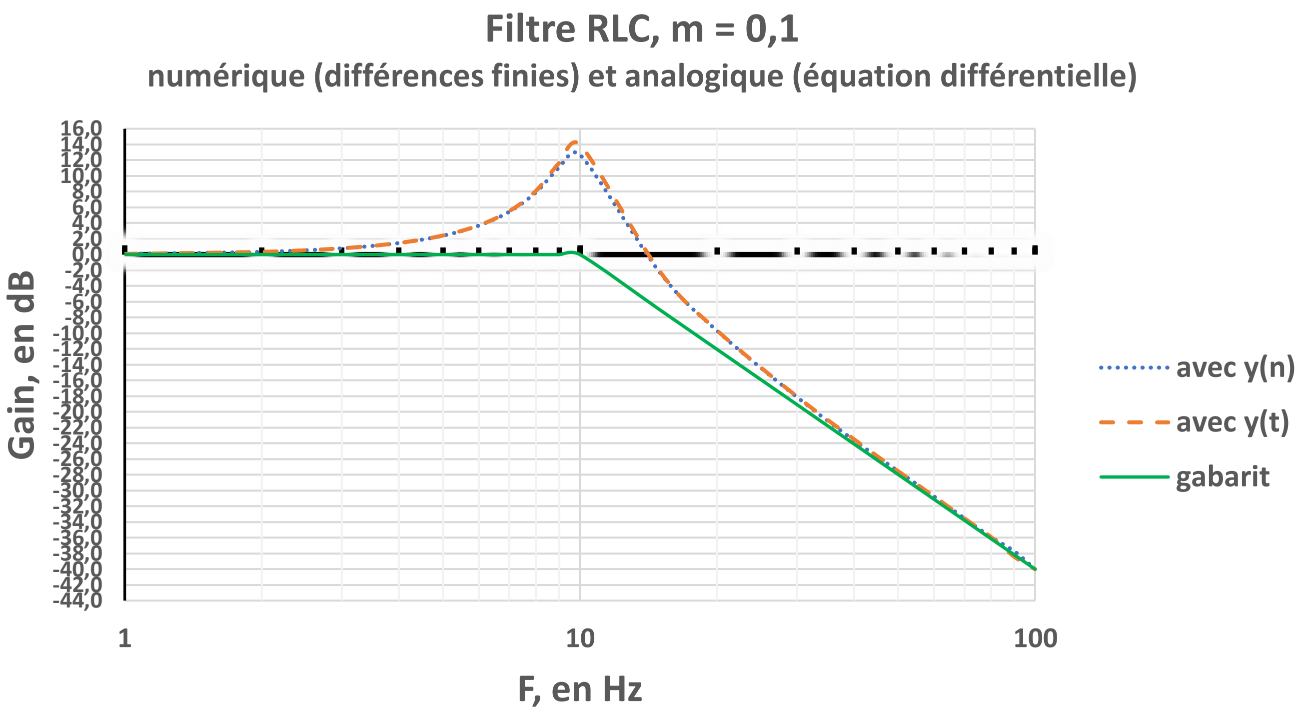
Le gain « numérique » perd 0,37 dB à cette fréquence particulière.



$G\_y(n)$ = 4,321 (+12,71 dB)
$G\_y(t)$ = 5,000 (+13,98 dB)
$G\_complexe$ = 5,000 (+13,98 dB)

Le régime transitoire est clairement visible.
Les deux tensions $y(n)$ et $y(t)$ se superposent : l'équation du filtre numérique fonctionne !

$G\_y(n) = 0{,}864 G\_y(t)$
En dB : $G\_y(n) = G\_y(t) - 1{,}27$
Néanmoins, le gain « numérique » perd 1,27 dB.



Les deux diagrammes se superposent, avec un léger écart au maximum du gain.

f_max	= 9,90 Hz
$G\_y(n)\_max$	= 4,354 (+12,778 dB)
$G\_y(t)\_max$	= 5,025 (+14,023 dB)
$G\_complexe\text{-}max$	= 5,025 (+14,023 dB)

$G\_y(n)\_max = 0{,}866 G\_y(t)\_max$
En dB : $G\_y(n)\_max = G\_y(t)\_max - 1{,}25$

Le gain « numérique » perd 1,25 dB à cette fréquence particulière.

10. Conclusion

L'approximation des différences finies fonctionne bien et délivre une équation de filtre extrêmement simple :

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

Trois multiplications et deux « additions » !

L'écart maximum de gain entre les versions « analogique » et « numérique » n'est que de 1,27 dB, du moins jusqu'à un coefficient d'amortissement minimum *m* égal à 0,1 et pour les fréquences d'entrée testées.

Annexe 1

Avec un signal triangulaire à l'entrée du filtre

A. L'expression de *x*(*n*), signal triangulaire

$$x(t) = E\frac{2}{a}\left(t - a\left\lfloor \frac{t}{a} + \frac{1}{2}\right\rfloor\right)(-1)^{\left\lfloor \frac{t}{a}+\frac{1}{2}\right\rfloor}$$

avec $a = \frac{T}{2}$, T étant la période du signal triangulaire ($T = \frac{1}{f}$) et $\lfloor\ \rfloor$ désignant la « partie entière ».

Par exemple, pour un nombre réel k : $\lfloor k \rfloor \leq k < \lfloor k \rfloor + 1$.

$\lfloor k \rfloor$ est un nombre entier négatif, positif ou nul.

« ent(*k*) » est la fonction correspondante dans Excel.

Pour le filtre numérique :

$$x(n) = E\frac{2}{a}\left(nTs - a\left\lfloor \frac{nTs}{a} + \frac{1}{2}\right\rfloor\right)(-1)^{\left\lfloor \frac{nTs}{a}+\frac{1}{2}\right\rfloor} \qquad (6)$$

Il est donc très facile d'utiliser cette expression dans l'équation du filtre numérique (5). Il n'y a aucun calcul supplémentaire à effectuer !

B. Simulation pratique avec Excel (fichier disponible sur simple demande)

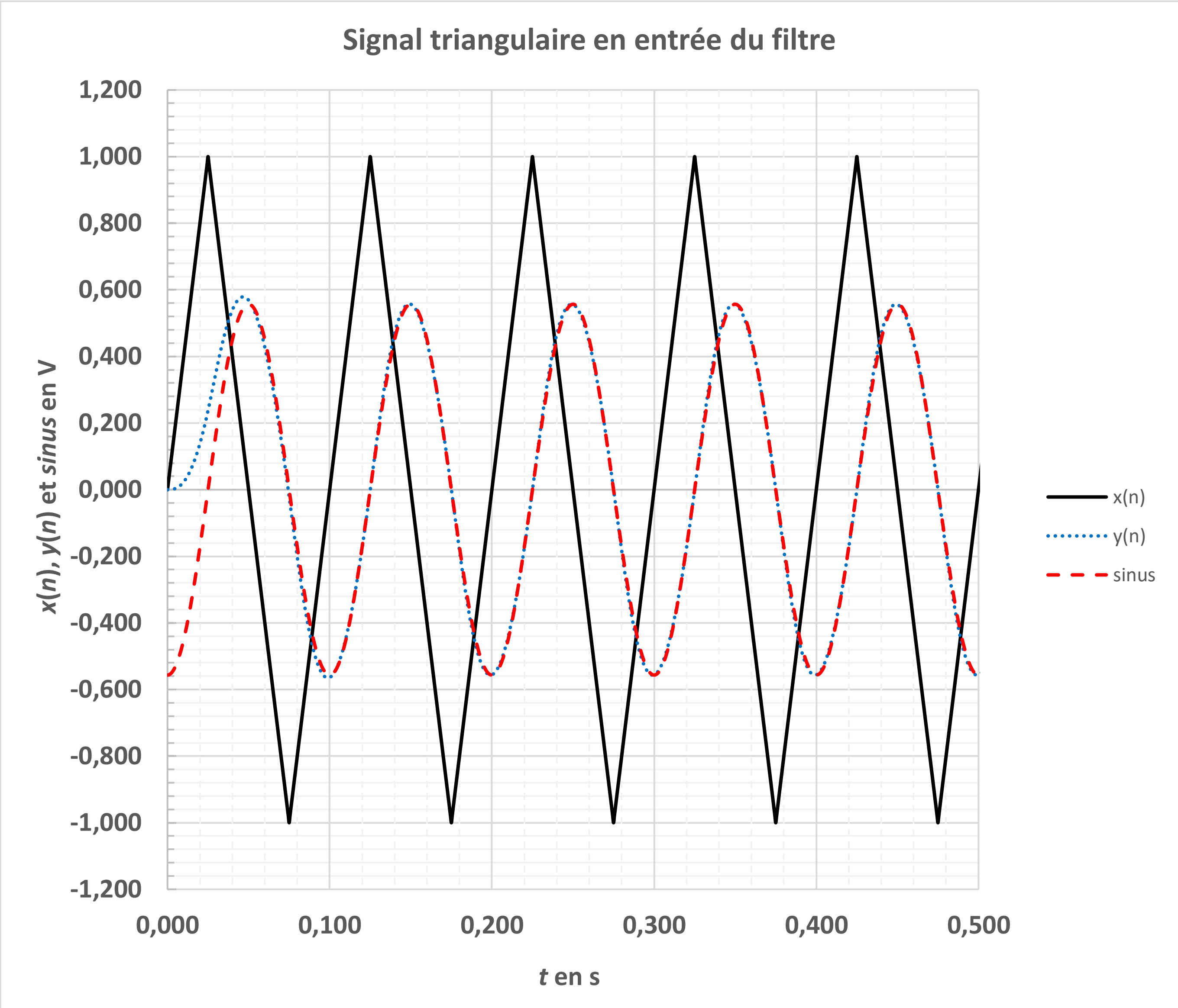
Reprenons les mêmes données :

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10$ Hz $\qquad f = \frac{1}{T}$ (par exemple de 1 à 100 Hz) et *m* au choix.

Signal d'entrée : celui donné en (6). Ici, E = 1 V.

Ts = 0,0005 s soit 100 fois plus petite que la demi-période $\frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{f_0}$.

Avec $0\text{ s} \leq t \leq 1\text{ s}$, soit $0 \leq n \leq 2000$, c'est-à-dire 2001 échantillons.



Ici f = 10 Hz et $m=\sqrt{2}/2$.

Nous retrouvons bien en sortie du filtre un signal $y(n)$ <u>sinusoïdal</u> à la fréquence f, déphasé d'une valeur $\Delta\varphi$ par rapport au signal d'entrée $x(n)$:

$$\Delta\varphi=\operatorname{atan2}\left(1-\frac{f^2}{f_0^{\,2}};-2m\frac{f}{f_0}\right)$$

Voir le paragraphe 4 dans https://www.f5kee.fr/partie-1-section-a/

Ici $f = f_0$ = 10 Hz donc $\Delta\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$.

Le signal « *sinus* » du graphe est calculé de la façon suivante :

$$sinus=y(n)\_max\times\sin\left[2\pi f\times nTs+\Delta\varphi\right]$$

Après le régime transitoire, il sert à vérifier la forme sinusoïdale du signal de sortie $y(n)$.

Annexe 2

Avec deux signaux sinusoïdaux à l'entrée du filtre

A. L'expression de *x*(*n*)

$$x(n) = E\sin(2\pi f1 \times nTs) + E\sin(2\pi f2 \times nTs) \qquad (7)$$

f1 et *f2* étant les fréquences des deux signaux (de même amplitude crête *E*) à l'entrée du filtre.

B. Simulation pratique avec Excel (fichier disponible sur simple demande)

Reprenons les mêmes données :

$f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ =10 Hz   Ici *f1* = 10 Hz et *f2* = 70 Hz et *m* au choix.

Signal d'entrée : celui donné en (7). Ici, *E* = 1 V.

Ts = 0,0005 s soit 100 fois plus petite que la demi-période $\dfrac{1}{2}T_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_0}$.

Avec $0 \text{ s} \le t \le 1 \text{ s}$, soit $0 \le n \le 2000$, c'est-à-dire 2001 échantillons.

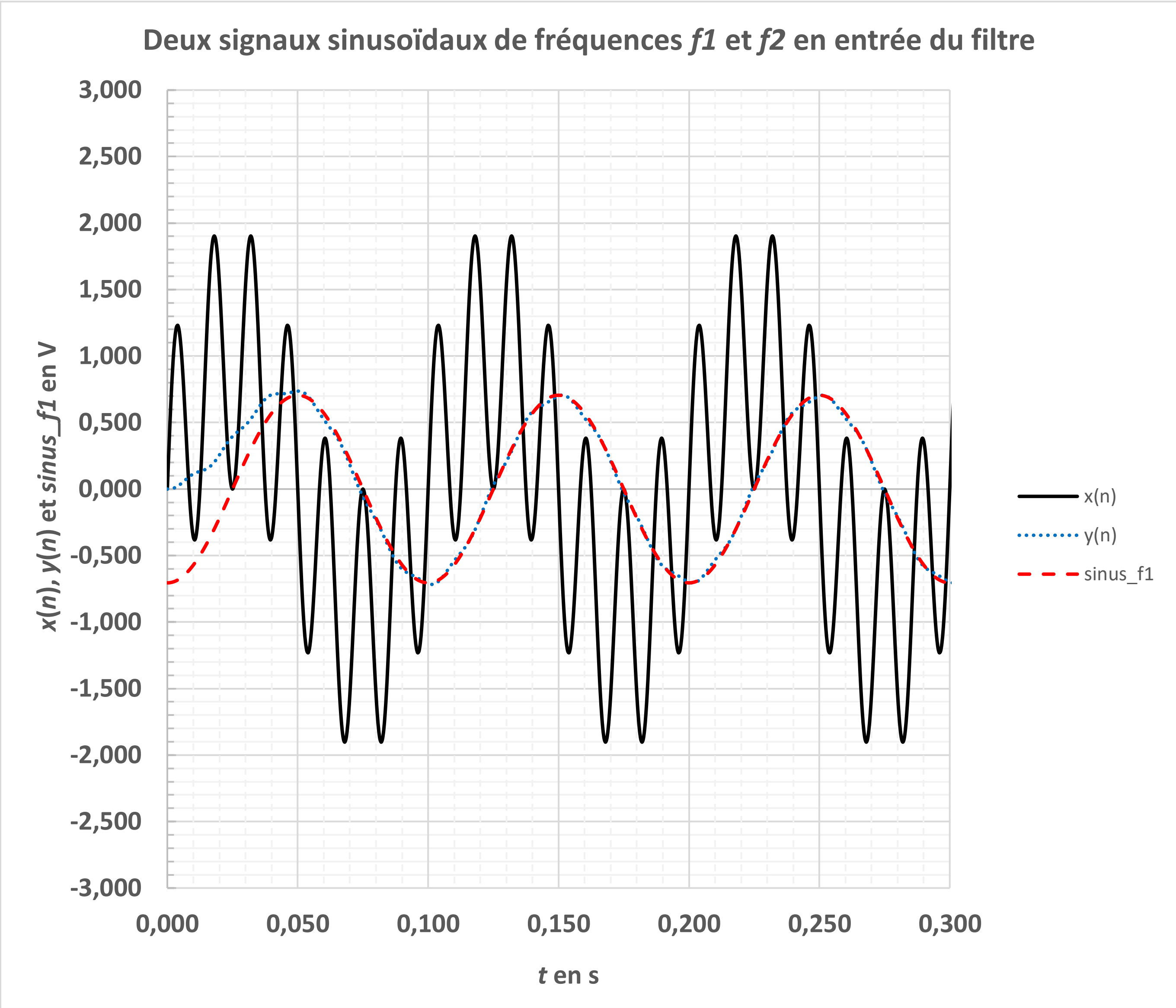
Nous retrouvons bien en sortie du filtre un signal *y*(*n*) sinusoïdal à la fréquence *f1*.

Le signal « *sinus_f1* » du graphe est calculé de la façon suivante :

$$sinus\_f1 = y(n)\_max \times \sin\left[2\pi f_1 \times nTs + \Delta\varphi\right]$$

$\Delta\varphi$: voir l'annexe 1.

Après le régime transitoire, il sert à vérifier la fréquence et la forme sinusoïdale du signal de sortie *y*(*n*).


Deux signaux sinusoïdaux de fréquences f1 et f2 en entrée du filtre
3,000
2,500
2,000
1,500
1,000
0,500
0,000
-0,500
-1,000
-1,500
-2,000
-2,500
-3,000
x(n), y(n) et sinus_f1 en V
0,000
0,050
0,100
0,150
0,200
0,250
0,300
t en s
x(n)
y(n)
sinus_f1