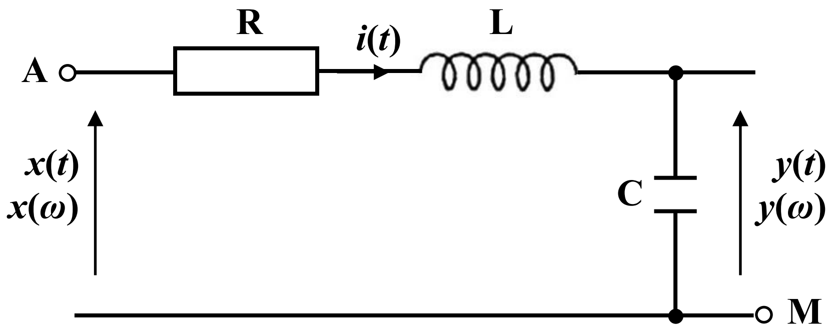
Filtres RLC, avec C en sortie

Partie 1. Filtre analogique, avec de vrais composants R, L et C passifs

Section A. En utilisant les impédances complexes

Jean-Pierre Waymel, F5FOD
26 juillet 2025 v05



Résumé

Dans cette section A, nous établirons l'expression du gain en tension de ce filtre, de son module et de sa phase en fonction de la fréquence en utilisant les impédances complexes. Le coefficient d'amortissement m nous permettra d'obtenir des formules relativement simples.
Nous déterminerons les trois régimes de fonctionnement du filtre en fonction de la valeur de ce coefficient m par rapport à 1. Nous tracerons les courbes du module et de la phase du gain dans le plan de Bode pour chacun de ces trois régimes.
Puis nous établirons l'expression de la tension de sortie en fonction du temps en prenant comme signal d'entrée le signal sinusoïdal $x(t) = E\sin(\omega t)$. Nous constaterons alors que la tension de sortie n'est pas nulle à $t = 0$ s alors qu'elle l'est en entrée ! D'ailleurs, le calcul effectué avec les impédances complexes ignore tout des conditions initiales qui prévalaient à $t = 0$ s. Cette « anomalie » sera résolue dans la section B.

1. Le gain en tension (attention : $R \neq 0$ ohm)

Nous supposerons le lecteur familier avec les calculs mettant en jeu les nombres complexes.

Condensateur C : $\dfrac{1}{jC\omega}$ Bobinage L : $jL\omega$ Résistance R : R

Le gain en tension $G(\omega)$ a pour expression complexe :

$$G(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$

soit :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 - LC\omega^2\right) + jRC\omega} \qquad (1)$$

2. Les expressions canoniques

Soit ω_0 la pulsation de résonance du circuit LC et Q son facteur de qualité :

$$LC\omega_0^{\ 2} = 1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Nous pouvons alors exprimer les produits LC et RC de la façon suivante :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^{\ 2}} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{Q}\frac{1}{\omega_0}$$

et écrire ainsi l'expression (1) :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}\right) + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad (2)$$

Allons plus loin encore en notant $m = \frac{1}{2Q}$, m étant le coefficient d'amortissement :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}\right) + 2jm\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad \textbf{(avec } m \neq 0 \textbf{ car } R \neq 0 \textbf{ ohm)} \qquad (3)$$

3. Le module du gain en tension

$$\left|G(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}\right)^2 + 4m^2\frac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}}} \qquad (4)$$

Les deux asymptotes dans le plan de Bode

a) Quand $\omega \ll \omega_0$, alors $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ et $\left|G(\omega)\right| \to 1$.

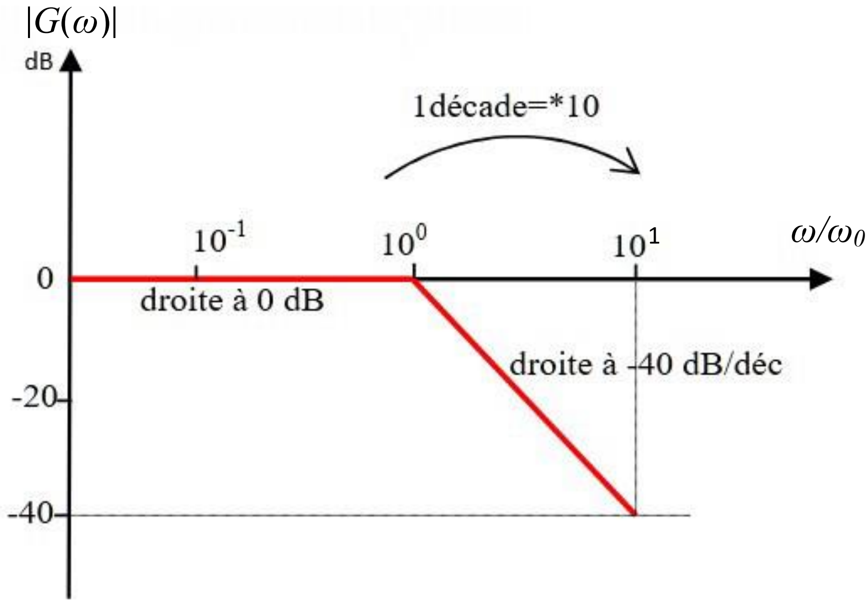
Exprimé en dB : $20\log\left|G(\omega)\right| \to 0\,\text{dB}$.

b) Quand $\omega \gg \omega_0$, alors $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et $\left|G(\omega)\right| \to \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^{\ 4}}}} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}}$.

Exprimé en dB : $20\log\left|G(\omega)\right| \to -20\log\frac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}} = -40\log\frac{\omega}{\omega_0}$ dB.

Pour $\omega = 10\omega_0$ (une décade), $20\log|G(\omega)| \to -40$ dB.

Le filtre a alors une pente égale à -40 dB par décade.



(schéma emprunté à Ismaël Driouch, ENSAH)

L'échelle de pulsation (ou de fréquence) est logarithmique.

Les deux asymptotes se croisent en $\dfrac{\omega}{\omega_0} = 10^0 = 1$, soit $\omega = \omega_0$, avec $|G(\omega)| = 0$ dB par convention.

4. La phase du gain en tension

Pour lever le doute sur le signe de $\varphi(\omega)$, transformons l'expression (3) de la façon suivante :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right) + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right) - 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left[\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right) + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0}\right]\left[\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right) - 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0}\right]}$$

soit :

$$G(\omega) = \frac{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right) - 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right)^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}}$$

$$\text{Partie réelle de } G(\omega) = \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right)^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}}$$

$$\cos\left[\varphi(\omega)\right]=\frac{\text{Partie réelle de } G(\omega)}{\left|G(\omega)\right|}=\frac{1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}}$$

$$\text{Partie imaginaire de } G(\omega)=\frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$\sin\left[\varphi(\omega)\right]=\frac{\text{Partie imaginaire de } G(\omega)}{\left|G(\omega)\right|}=\frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+4m^2\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}}$$

=> $\sin\left[\varphi(\omega)\right]$ est donc toujours négatif.

$$\tan\left[\varphi(\omega)\right]=\frac{\sin\left[\varphi(\omega)\right]}{\cos\left[\varphi(\omega)\right]}=\frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{-2m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}} \qquad (5)$$

- si $\omega<\omega_0$ => $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi(\omega)<0$
- si $\omega=\omega_0$ => $\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\omega=\omega_0$: pulsation de résonance
- si $\omega>\omega_0$ => $-\pi<\varphi(\omega)<-\dfrac{\pi}{2}$

La phase est toujours négative.

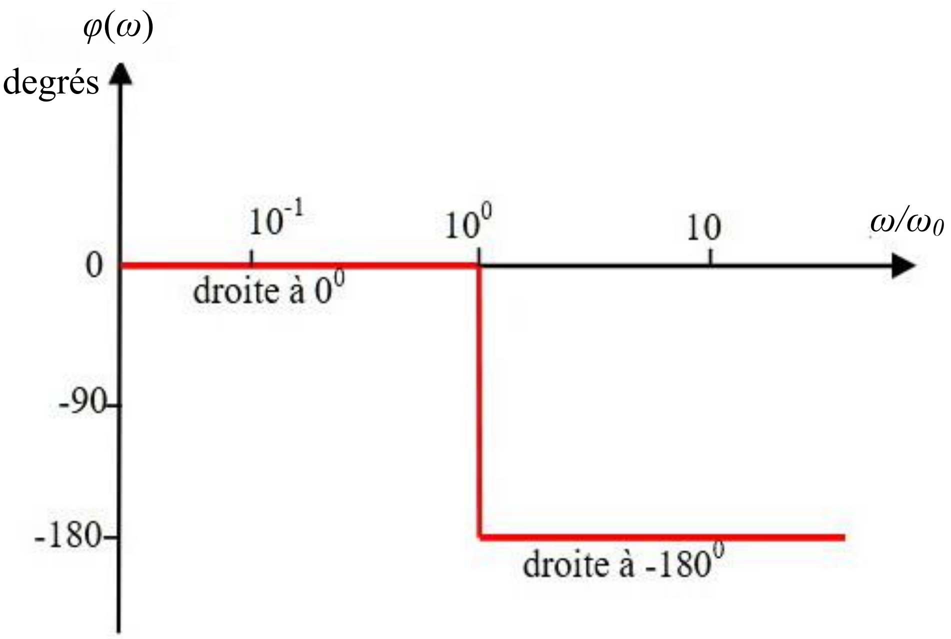
En utilisant Excel :

$$\varphi(\omega)=\text{atan2}\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2};-2m\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad (6)$$

Les deux asymptotes dans le plan de Bode

a) Quand $\omega \ll \omega_0$, alors $\dfrac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ et $\varphi(\omega) \to 0$.

b) Quand $\omega \gg \omega_0$, alors $\dfrac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et $\varphi(\omega) \to -\pi$



5. Les trois « régimes » de fonctionnement du filtre

Notons $q = j\dfrac{\omega}{\omega_0}$. L'expression (3) devient :

$$G(q) = \frac{1}{q^2 + 2mq + 1}$$

Calculons le discriminant Δ du dénominateur : $\Delta = 4\left(m^2 - 1\right)$.

5.1 Premier cas : $m > 1$

Le discriminant Δ est positif. Il y a donc deux racines réelles : $-m \pm \sqrt{m^2 - 1}$.

Nous pouvons alors mettre $G(q)$ en facteurs :

$$G(q) = \frac{1}{\left(q + m - \sqrt{m^2 - 1}\right)\left(q + m + \sqrt{m^2 - 1}\right)}$$

Posons :

$$\omega_1 = \omega_0\left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right) \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \omega_0\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$$

$$G(\omega)=\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)\left(j\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)}=\frac{1}{\frac{\omega_1}{\omega_0}\left(j\frac{\omega}{\omega_1}+1\right)\frac{\omega_2}{\omega_0}\left(j\frac{\omega}{\omega_2}+1\right)}=\frac{1}{\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_0{}^2}\left(j\frac{\omega}{\omega_1}+1\right)\left(j\frac{\omega}{\omega_2}+1\right)}$$

Or $\omega_1\omega_2=\omega_0$, donc :

$$G(\omega)==\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Notre filtre du second ordre est en réalité ici constitué d'une cascade de deux filtres du premier ordre !

<u>5.2 Deuxième cas : $m = 1$</u>

Le discriminant Δ est nul et $\omega_1=\omega_2=\omega_0$.

Par conséquent :

$$G(\omega)=\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Notre filtre du second ordre est en réalité ici constitué d'une cascade de deux filtres identiques du premier ordre !

<u>5.3 Troisième cas : $m < 1$</u>

Le discriminant Δ est négatif. Donc pas de racines réelles pour le dénominateur de $G(q)$.

6. Y a-t-il un maximum pour le module du gain en tension ?

Notons $v=\frac{\omega}{\omega_0}$, donc $v>0$, le cas $v=0$ étant en effet exclu car la fréquence serait nulle !

L'expression (4) devient :

$$\left|G(v)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-v^2\right)^2+4m^2v^2}}=\frac{1}{\sqrt{P(v)}}=P(v)^{-1/2} \text{ avec } P(v)=\left(1-v^2\right)^2+4m^2v^2.$$

Calculons la dérivée de $\left|G(v)\right|$ par rapport à v :

$$\frac{d\left|G(v)\right|}{dv}=-\frac{1}{2}\left[2(-2v)(1-v^2)+8m^2v\right]P^{-3/2}=2v(-v^2+1-2m^2)P^{-3/2}$$

Cette dérivée s'annule quand $-v^2+1-2m^2=0$, soit quand $v=\sqrt{1-2m^2}$.

Ce qui nous donne une condition pour m : $m<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le signe de la dérivée est alors le signe de $-v^2+1-2m^2$, ce qui nous donne le tableau de variation suivant :

v	0		$\sqrt{1-2m^2}$		$+\infty$
$\dfrac{d\lvert G(v)\rvert}{dv}$		$+$	0	$-$	
$\lvert G(v)\rvert$	1 (0 dB)	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$	$\searrow$	0 ($-\infty$ dB)

avec $m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Le module du gain en tension présente donc un maximum quand $m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ce maximum se produit à la pulsation $\omega=\omega_0\sqrt{1-2m^2}$ et vaut $\dfrac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$.

Quand $Q\geq 5$, $m\leq 0{,}1$ et $\sqrt{1-2m^2}\sim 1$. Le maximum du module du gain en tension a donc lieu à $\omega\sim\omega_0$.

Y a-t-il un maximum à ce maximum ?

Appelons $M(m)$ la valeur maximum du module du gain en tension, donc quand $m<\sqrt{2}/2$:

$$M(m)=\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Calculons la dérivée de $M(m)$ par rapport à m :

$$\frac{dM(m)}{dm}=-\left[2\sqrt{1-m^2}+2m\frac{1}{2}(-2m)\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\right]\frac{1}{4m^2\left(1-m^2\right)}=\frac{2m^2-1}{2m^2\left(1-m^2\right)\sqrt{1-m^2}}$$

Pour $0<m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $2m^2-1<0$ et $1-m^2>0$.

Donc $\dfrac{dM(m)}{dm}<0$ et $M(m)$ est strictement décroissante.

Quand $m\to 0$, $M(m)\to+\infty$ ($+\infty$ dB).

Quand $m\to\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $M(m)\to 1$ (0 dB).

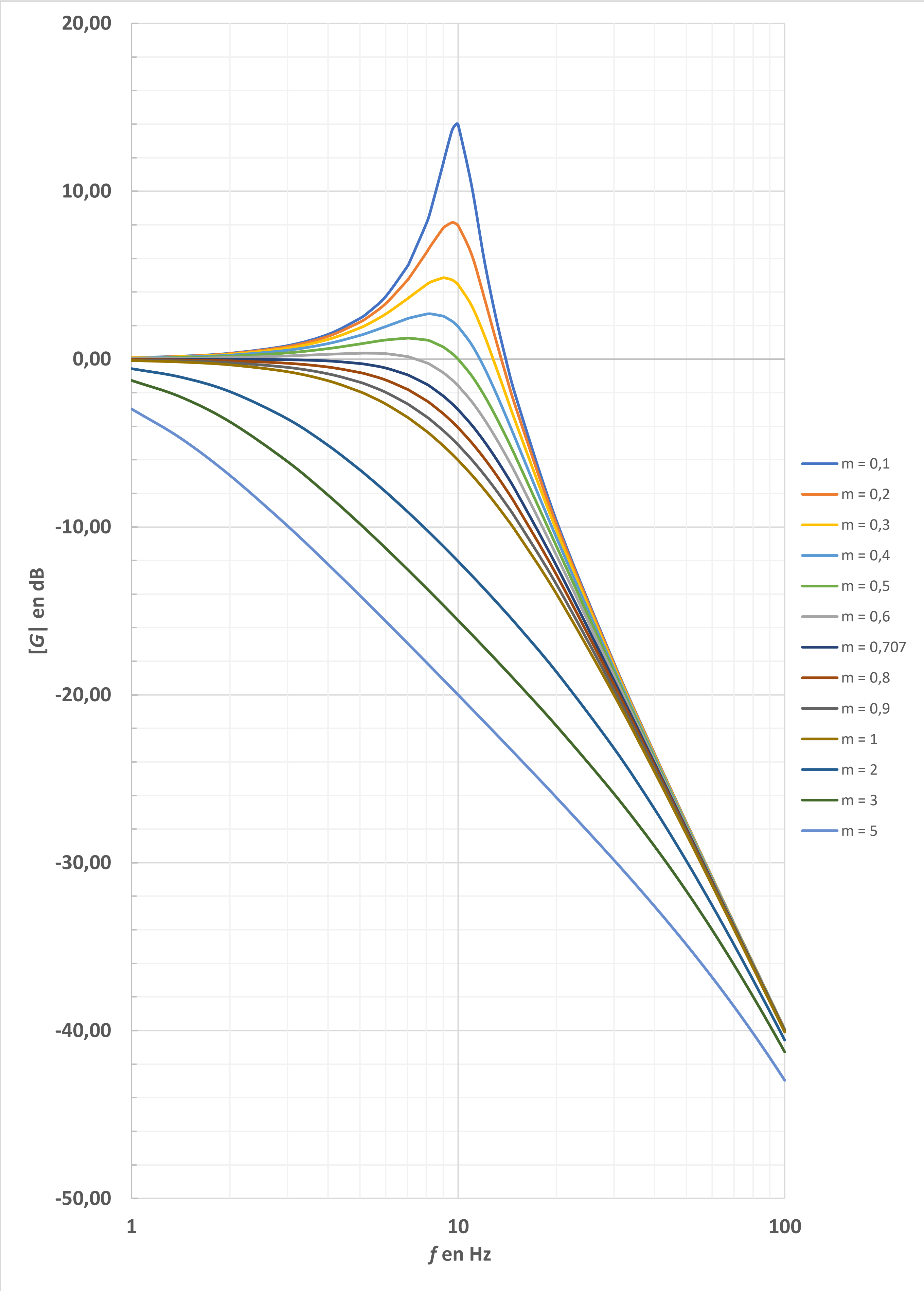
7. Graphe du module du gain en tension à partir de l'expression (4)

$L = 2{,}533$ H $\qquad C = 100\ \mu$F $\qquad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62{,}83222$ rad/s soit $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \sim 10$ Hz

$$m = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Exemple purement théorique avec des composants parfaits !

Voir page suivante.



20,00
10,00
0,00
-10,00
-20,00
-30,00
-40,00
-50,00
[G] en dB
1
10
100
f en Hz
m = 0,1
m = 0,2
m = 0,3
m = 0,4
m = 0,5
m = 0,6
m = 0,707
m = 0,8
m = 0,9
m = 1
m = 2
m = 3
m = 5

<u>*Les trois régimes*</u>

a) $m<1$: *régime dit* ***oscillant***

1[er] cas : $0<m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: résonance

Il s'agit des six premières courbes en partant du haut. Elles présentent toutes un maximum.

R (Ω)	31,83	63,66	95,49	127,32	159,15	190,98
Q	5,00	2,50	1,67	1,25	1,00	0,83
m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
gain max (dB)	14,02	8,14	4,85	2,70	1,25	0,35
f à gain max (Hz)	9,90	9,59	9,06	8,25	7,07	5,29
gain à f_0 (dB)	13,98	7,96	4,44	1,94	0,00	-1,58

Quand R diminue, nous vérifions bien que :
- le facteur de qualité Q augmente et le coefficient d'amortissement m diminue,
- la valeur maximale du module du gain en tension augmente : c'est la surtension due à la résonance,
- cette résonance se produit à une fréquence différente de la fréquence de résonance f_0 du circuit LC,
- cette fréquence s'en rapproche quand Q a une valeur supérieure ou égale à 5.

2[e] cas : $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Il s'agit de la septième courbe en partant du haut.

R (Ω)	225,08
Q	0,71
m	$\sqrt{2}/2$
gain à f_0 (dB)	$-3{,}01$

En réalité, il n'y a plus de surtension et le module du gain en tension est égal à -3 dB à f_0. C'est la courbe la plus plate possible.

3ᵉ cas : $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$

Il s'agit des huitième et neuvième courbes en partant du haut.

R (Ω)	254,65	286,48
Q	0,63	0,56
m	0,8	0,9
gain à f_0 (dB)	−4,08	−5,11

Ici aussi, il n'y a plus de surtension.

b) $m = 1$: *régime dit **critique***

Il s'agit de la quatrième courbe en partant du bas.

R (Ω)	318,31
Q	0,5
m	1
gain à f_0 (dB)	−6,02

Le module du gain en tension est égal à −6 dB à f_0.

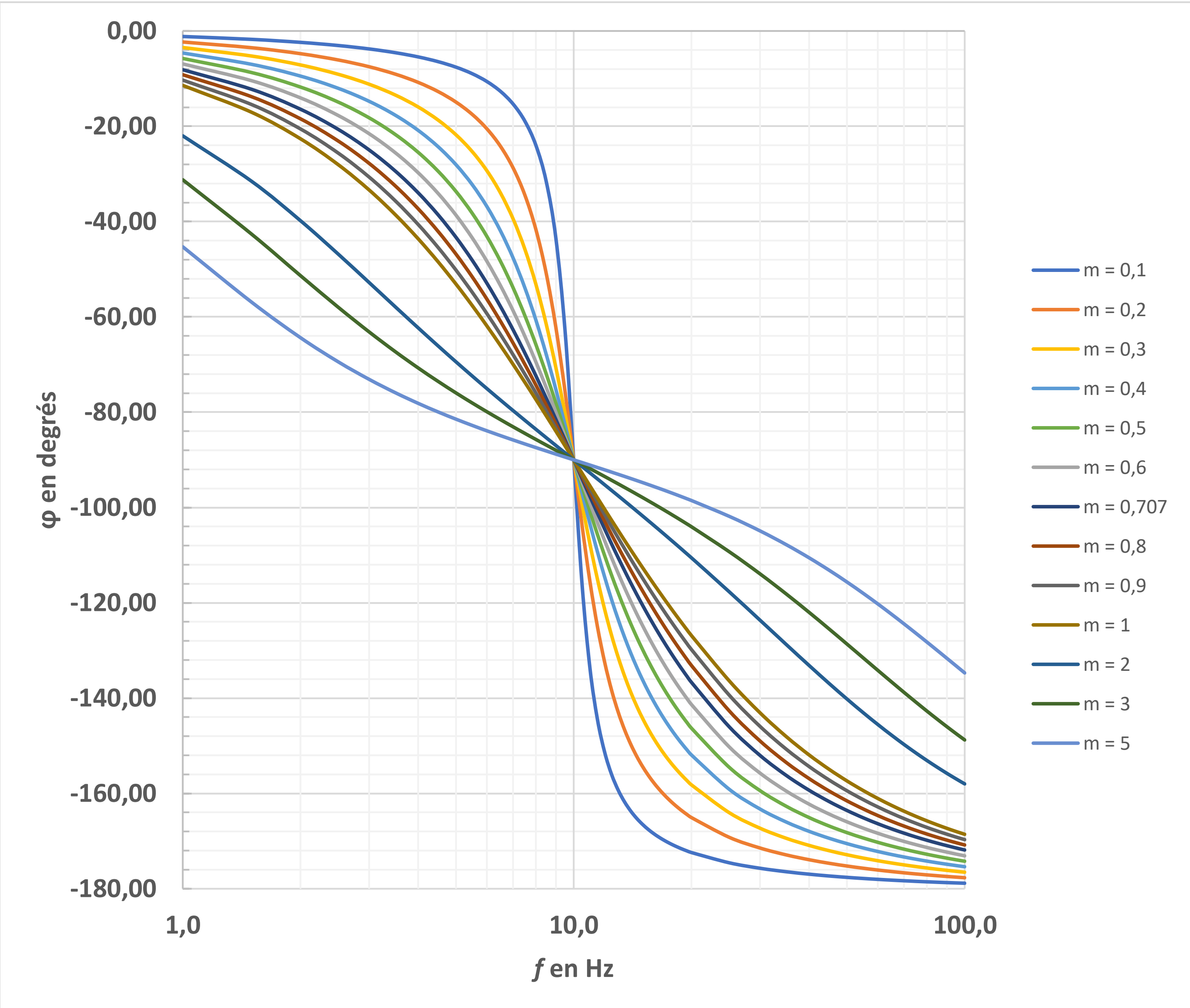
c) $m > 1$: *régime dit **apériodique***

Il s'agit des trois courbes du bas.

Voir page suivante.

R (Ω)	636,82	954,92	1591,54
Q	0,25	0,17	0,10
m	2	3	5
f_1 (Hz)	2,68	1,72	1,01
gain à f_1 (dB)	−3,03	−3,01	−3,01
f_2 (Hz)	37,32	58,28	98,99
gain à f_2 (dB)	−25,91	−33,64	−42,83
gain à f_0 (dB)	−12,04	−15,56	−20,00

8. Graphe de la phase du gain en tension à partir de l'expression (6)



9. Tension de sortie $y(t)$

Tension d'entrée : $x(t) = E\sin(\omega t)$

Tension de sortie : $y(t) = |G(\omega)| E\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} E\sin\left(\omega t - \arctan\frac{-2m\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) \qquad (7)$$

- si $\omega < \omega_0$ => $-\frac{\pi}{2} < \varphi(\omega) < 0$

- si $\omega = \omega_0$ => $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ et $\omega = \omega_0$: pulsation de résonance

- si $\omega > \omega_0$ => $-\pi < \varphi(\omega) < -\frac{\pi}{2}$

10. $y(t)$ **: en avance ou en retard de phase par rapport à** $x(t)$ **?**

Prenons un exemple : $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ pour une certaine valeur de ω.

Soit l'instant t_1 où $x(t)$ arrive à son énième maximum.

T est la période du signal sinusoïdal appliqué en entrée.

Nous avons alors $\omega t_1 = n\frac{\pi}{2}$ et $t_1 = n\frac{\pi}{2}\frac{1}{\omega} = n\frac{\pi}{2}\frac{T}{2\pi} = n\frac{T}{4} = n\frac{2T}{8}$

Ce qui correspond à l'instant t_2 pour $y(t)$ avec :

$$\omega t_2 - \frac{\pi}{4} = n\frac{\pi}{2} \text{ et } t_2 = n\frac{\pi}{2}\frac{1}{\omega} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{\omega} = n\frac{\pi}{2}\frac{T}{2\pi} + \frac{\pi}{4}\frac{T}{2\pi} = n\frac{T}{4} + \frac{T}{8} = n\frac{2T}{8} + \frac{T}{8}$$

Par conséquent $t_2 > t_1$, la tension de sortie $y(t)$ est donc en retard par rapport à la tension d'entrée $x(t)$.

11. Graphe de $y(t)$

Signal sinusoïdal en entrée : $x(t) = E\sin(\omega t)$.
Signal sinusoïdal en sortie : $y(t) = |G(\omega)| E\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$.

Pour notre exemple, choisissons E = 1 V, soit $x(t) = \sin(\omega t)$.

Et choisissons $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62{,}83222$ rad/s soit $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10$ Hz.

$$|G(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + 4m^2\frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2}}} = \frac{1}{2m}$$

$$\varphi(\omega_0) = \text{atan2}\left(1-\frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2};-2m\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = \text{atan2}(0;-2m) = -1,570796...\text{ rad} = -\frac{\pi}{2} = -90°$$

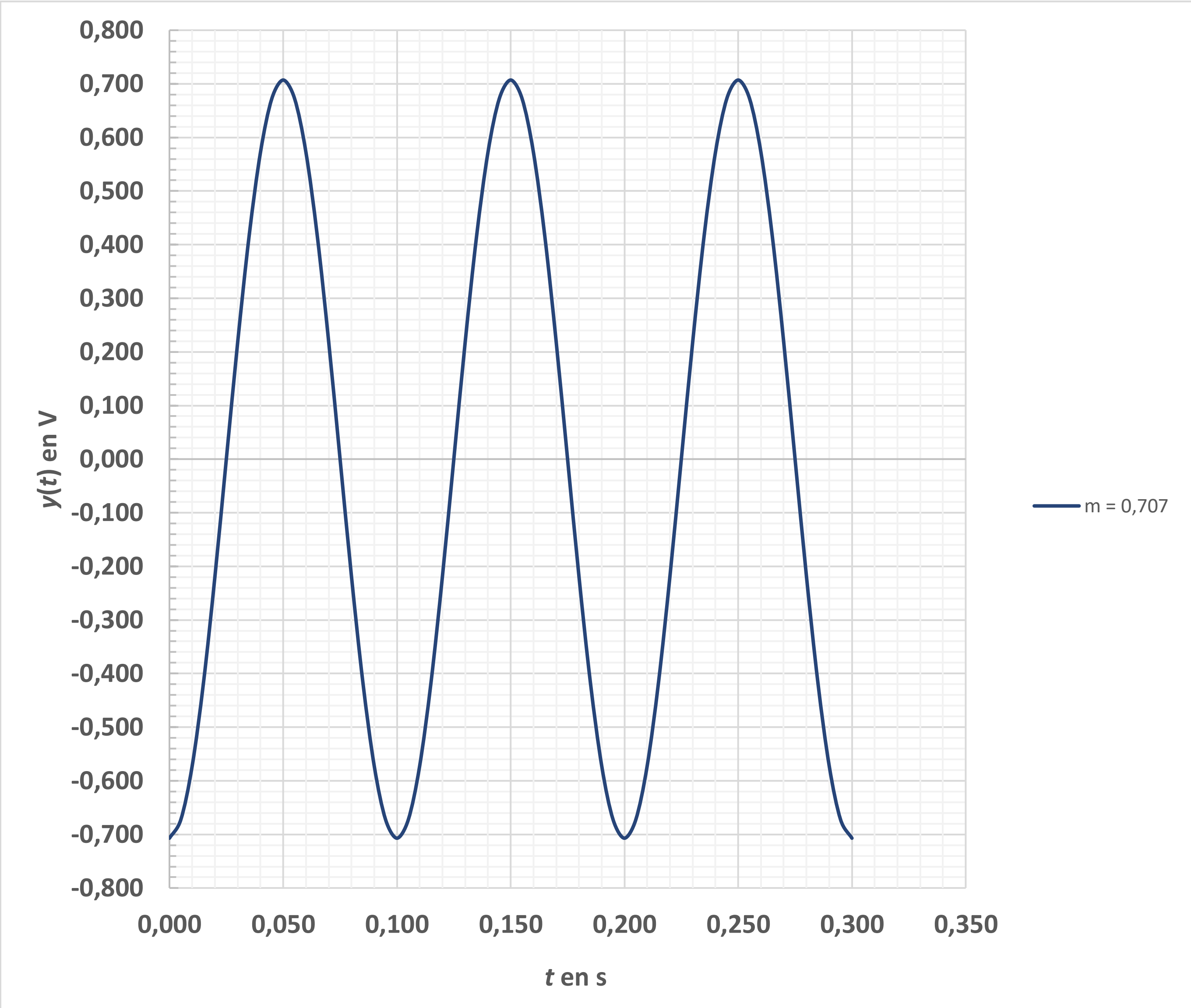
Choisissons $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où :

$$|G(\omega_0)| = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0,707$$

Signal sinusoïdal en sortie : $y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega_0 t)$

$$y(t) \sim 0,707\cos(\omega_0 t)$$

Ce que montre parfaitement le graphe suivant :



12. Que se passe-t-il à t = 0 ?

Tension d'entrée : $x(0) = \sin\left(0\right) = 0 \text{ V}$.

Tension de sortie : $y(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sim -0,707 \text{ V}$, ce qui se voit sur le graphe précédent.

Pourtant « Rien à l'entrée donc rien à la sortie ! »…
La tension de sortie devrait également être nulle.
Ou alors le condensateur C devait être chargé au moment du démarrage.
Mais on ne l'a supposé nulle part dans l'établissement des expressions !

La réponse à cet étonnant phénomène sera donnée à la section B…