

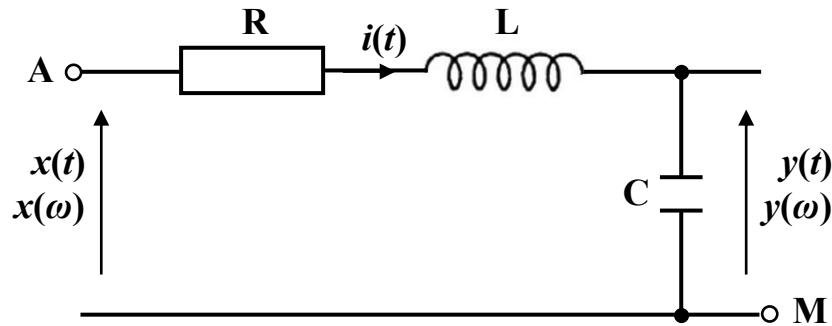
Filtres RLC, avec C en sortie

Partie 1. Filtre analogique, avec de vrais composants R, L et C passifs

Section B. En résolvant l'équation différentielle

Jean-Pierre Waymel, F5FOD
23 juillet 2025

v05



Résumé

Dans cette section, nous calculerons l'expression de la tension de sortie en fonction du temps $y(t)$ en résolvant de manière formelle l'équation différentielle qui lie cette tension, ses deux dérivées successives et la tension d'entrée. Cette tension d'entrée sera ici sinusoïdale et de la forme $x(t) = E \sin(\omega t)$.

Ce calcul s'effectuera en trois étapes :

- en annulant le « second membre » de l'équation différentielle, nous obtiendrons l'équation dite *homogène*. Nous en calculerons la solution $y_h(t)$ dans les trois cas possibles selon la valeur du coefficient d'amortissement m par rapport à 1 ;
- après avoir rétabli le second membre de l'équation différentielle, nous rechercherons une solution dite *particulière* $y_p(t)$;
- nous obtiendrons la solution complète en faisant la somme $y_h(t) + y_p(t)$ et en tenant compte des conditions initiales (à $t = 0$ s : condensateur C déchargé et $i(t) = i(0) = 0$ A).

Nous constaterons :

- qu'à $t = 0$ s, la tension du signal de sortie sera bien égale à 0 volt, la tension du signal d'entrée étant alors égale à 0 volt et les conditions initiales étant celles décrites ci-dessus,
- que la tension $y_h(t)$ s'annulera d'autant plus vite que m sera petit devant 1,
- qu'il ne restera alors que la tension $y_p(t)$ qui ne sera rien d'autre que la tension trouvée en section A grâce aux impédances complexes !

En définitive, les impédances complexes donnent la solution au problème de façon extrêmement simple à condition de ne s'intéresser qu'au régime établi une fois passé le régime transitoire de démarrage.

1. L'équation différentielle (**attention : $R \neq 0$ ohm**)

Appliquons la loi d'Ohm entre A et M :

$$x(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t)$$

Aux bornes du condensateur :

$$dq = i(t)dt = Cdy(t) \Rightarrow i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) \Rightarrow LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (1)$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients réels et constants.

2. La mise sous forme canonique

Soit ω_0 la pulsation de résonance du circuit LC et Q son facteur de qualité :

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Soit $m = \frac{1}{2Q}$, m étant le coefficient d'amortissement (**avec $m \neq 0$ car $R \neq 0$ ohm**).

Nous pouvons alors exprimer les produits LC et RC de la façon suivante :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{Q} \frac{1}{\omega_0} = 2m \frac{1}{\omega_0}$$

L'expression (1) devient :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m \frac{1}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (2)$$

3. Le signal d'entrée, ici sinusoïdal

Appliquons à l'entrée du filtre un signal sinusoïdal : $x(t) = E \sin(\omega t)$

L'expression (2) devient :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m \frac{1}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = E \sin(\omega t) \quad (3)$$

4. L'équation homogène

Annulons le second membre, nous obtenons l'équation dite « *homogène* » :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m \frac{1}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \quad (4)$$

Ou, pour en simplifier l'écriture :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (5)$$

avec $a = \frac{1}{\omega_0^2}$, $b = 2m \frac{1}{\omega_0}$ et $c = 1$.

Essayons la solution classique $y = e^{rt}$:

$$y' = re^{rt}$$

$$y'' = r^2 e^{rt}$$

Reportons dans (5) :

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

et divisons par e^{rt} :

$$ar^2 + br + c = 0 \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} r^2 + 2m \frac{1}{\omega_0} r + 1 = 0 \quad (6)$$

Cette équation du second degré en r est appelée « l'équation caractéristique » de l'équation différentielle (4).

Calculons son discriminant Δ :

$$\Delta = 4m^2 \frac{1}{\omega_0^2} - 4 \frac{1}{\omega_0^2} = 4(m^2 - 1) \frac{1}{\omega_0^2}$$

Il faut donc distinguer trois cas selon la valeur de m (rappelons que m est toujours positif).

4.1 Premier cas : $m > 1$

Le discriminant est positif et l'équation caractéristique (6) possède deux racines réelles r_1 et r_2 :

$$r_1 = \frac{-2m \frac{1}{\omega_0} - \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right) \omega_0 \quad r_2 = \frac{-2m \frac{1}{\omega_0} + \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \omega_0$$

L'équation *homogène* (4) possède donc deux solutions linéairement indépendantes :

$$e^{r_1 t} \quad \text{et} \quad e^{r_2 t}.$$

Par conséquent, sa solution générale est la suivante :

$$y(t) = y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad (7)$$

où λ et μ sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

4.2 Deuxième cas : $m = 1$

Le discriminant est nul et l'équation caractéristique (6) possèdent une racine réelle double r :

$$r = \frac{-2m \frac{1}{\omega_0}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = -m\omega_0 = -\omega_0$$

Cherchons une deuxième solution, la première étant e^{rt} .

Utilisons « la méthode de variation des constantes » en posant comme solution possible l'expression $y = u(t)e^{rt} = ue^{rt}$:

$$y' = u'e^{rt} + rue^{rt}$$

$$y'' = u''e^{rt} + ru'e^{rt} + ru'e^{rt} + r^2ue^{rt} = u''e^{rt} + 2ru'e^{rt} + r^2ue^{rt}$$

Reportons ces expressions dans (5) :

$$a(u''e^{rt} + 2ru'e^{rt} + r^2ue^{rt}) + b(u'e^{rt} + rue^{rt}) + c(ue^{rt}) = 0$$

Divisons par e^{rt} et ordonnons :

$$au'' + (2ar + b)u' + (ar^2 + br + c)u = 0$$

$$\text{Or } ar^2 + br + c = 0 \quad \text{et} \quad r = -\frac{b}{2a}$$

donc :

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = \lambda \Rightarrow u = \lambda t + \text{const}_1 \text{ (attention : dans ce deuxième cas, } \lambda \text{ est en V/s),}$$

où λ et const_1 sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

L'équation *homogène* (4) possède donc deux solutions linéairement indépendantes :

$$e^{rt} \quad \text{et} \quad (\lambda t + \text{const}_1)e^{rt}$$

Par conséquent, sa solution générale est la suivante :

$$y(t) = y_h(t) = \text{const}_2 e^{rt} + (\lambda t + \text{const}_1)e^{rt}$$

où const_2 est aussi une constante réelle dépendant des conditions initiales.

Soit finalement :

$$y(t) = y_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt} \tag{8}$$

où λ et μ sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

4.3 Troisième cas : $m < 1$

Le discriminant est négatif : $\Delta = -4(1 - m^2) \frac{1}{\omega_0^2} = 4j^2(1 - m^2) \frac{1}{\omega_0^2}$.

et l'équation caractéristique (6) possèdent deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm j\beta$:

$$\alpha \pm j\beta = \left(-m \pm j\sqrt{1 - m^2}\right)\omega_0$$

avec :

$$\alpha = -m\omega_0$$

$$\beta = \sqrt{1 - m^2} \omega_0$$

Avec la racine $\alpha + j\beta$, l'équation *homogène* (5) possède donc la solution suivante :

$$e^{(\alpha + j\beta)t} = e^{\alpha t} e^{j\beta t} = e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + j \sin(\beta t)] = e^{\alpha t} \cos(\beta t) + j e^{\alpha t} \sin(\beta t) = u + jv$$

ce u étant une fonction locale à ce paragraphe 4.3.

Reportons cette solution dans cette équation *homogène* :

$$a(u + jv)'' + b(u + jv)' + c(u + jv) = 0$$

Ordonnons :

$$(au'' + bu' + cu) + j(av'' + bv' + cv) = 0$$

soit :

$$au'' + bu' + cu = 0$$

$$av'' + bv' + cv = 0$$

Par conséquent, u et v soit $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ sont solutions de l'équation *homogène*. Elles sont linéairement indépendantes.

La racine $\alpha - j\beta$ apporte une nouvelle solution possible : $-v$ mais cette solution est linéairement dépendante de $+v$.

Par conséquent, la solution générale de l'équation *homogène* (4) est la suivante :

$$y(t) = y_h(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (9)$$

où λ et μ sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

5. La solution *particulière*

Cherchons maintenant une solution *particulière* $y_p(t)$ à l'équation (3), donc avec second membre. Ce second membre n'est autre que le signal d'entrée, un signal sinusoïdal.

Comme ce second membre est ici un sinus, une solution *particulière* pourrait comprendre un sinus. Mais sa dérivée ferait apparaître un cosinus. Une solution possible serait d'associer un sinus et un cosinus.

Testons donc la forme suivante :

$$y_p(t) = K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t)$$

où K et M seraient des constantes.

Dérivons $y_p(t)$ une première fois :

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = -K\omega \sin(\omega t) + M\omega \cos(\omega t)$$

puis une seconde fois :

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} = -K\omega^2 \cos(\omega t) - M\omega^2 \sin(\omega t)$$

Reportons ces expressions de dérivée dans l'équation (3) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_0^2} \left[-K\omega^2 \cos(\omega t) - M\omega^2 \sin(\omega t) \right] + \\ & 2m \frac{1}{\omega_0} \left[-K\omega \sin(\omega t) + M\omega \cos(\omega t) \right] + \\ & K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t) = E \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Ordonnons en cosinus et sinus :

$$\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} K + 2m \frac{\omega}{\omega_0} M + K \right) \cos(\omega t) + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} M - 2m \frac{\omega}{\omega_0} K + M - E \right) \sin(\omega t) = 0$$

Comme cette expression doit toujours être nulle quel que soit t , nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} K + 2m \frac{\omega}{\omega_0} M + K &= 0 \\ -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} M - 2m \frac{\omega}{\omega_0} K + M - E &= 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues K et M , E étant un paramètre (c'est la valeur maximale du signal sinusoïdal appliqué en entrée entre A et M).

Ce qui donne :

$$K = \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} E \quad \text{et} \quad M = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} E \quad (10) \text{ et } (11)$$

Donc $y_p(t) = K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t)$ est bien une solution *particulière* de l'équation (3).

Remarquons que K est toujours négatif.

Autre forme de la solution particulière

Nous allons exprimer la solution particulière $y_p(t) = K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t)$ sous forme d'une seule ligne trigonométrique :

$$y_p(t) = \text{amplitude_max} \times \sin(\omega t + \varphi)$$

soit :

$$y_p(t) = \text{amplitude_max} \times [\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)]$$

ou :

$$y_p(t) = [\text{amplitude_max} \times \sin(\varphi)] \cos(\omega t) + [\text{amplitude_max} \times \cos(\varphi)] \sin(\omega t)$$

Par conséquent :

$$\text{amplitude_max} \times \sin(\varphi) = K \quad \Rightarrow \quad \text{amplitude_max}^2 \times \sin^2(\varphi) = K^2$$

$$\text{amplitude_max} \times \cos(\varphi) = M \quad \Rightarrow \quad \text{amplitude_max}^2 \times \cos^2(\varphi) = M^2$$

et :

$$K^2 + M^2 = \text{amplitude_max}^2$$

$$\text{amplitude_max} = \sqrt{K^2 + M^2} \quad (\text{en tenant compte que } \text{amplitude_max} > 0).$$

En outre :

$$\sin(\varphi) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + M^2}} \quad \cos(\varphi) = \frac{M}{\sqrt{K^2 + M^2}} \quad \tan(\varphi) = \frac{K}{M} \quad (12)$$

soit :

$$\tan(\varphi) = \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

et :

$$\varphi = \arctan \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

=> Nous retrouvons exactement l'expression (5) de la partie 1 section A !

Comme K est toujours négatif, $\sin(\varphi)$ est toujours négatif.

Le signe de $\cos(\varphi)$ est celui de M , soit celui de son numérateur $1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

Par conséquent :

$$\text{- si } \omega < \omega_0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

$$\text{- si } \omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{- si } \omega > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$$

La phase φ est toujours négative.

Avec Excel, nous pouvons utiliser la formule suivante :

$$\varphi = \text{atan2}(M; K)$$

Finalement, nous obtenons l'autre expression de $y_p(t)$:

$$y_p(t) = \sqrt{K^2 + M^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

En remplaçant K et M par leurs expressions (10) et (11), nous obtenons :

$$\text{amplitude_max} = \sqrt{K^2 + M^2} = \sqrt{\frac{4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2}} E^2$$

soit :

$$\text{amplitude_max} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} E$$

D'où le module du gain en tension :

$$|G(\omega)| = \frac{\text{amplitude_max}}{E} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

=> Nous retrouvons exactement l'expression (4) de la partie 1 section A !

6. La solution complète de l'équation différentielle avec second membre

C'est la somme de la solution de l'équation *homogène* et de la solution *particulière* :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_h(t) + K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t) \quad (13)$$

avec les coefficients K et M calculés en (10) et (11).

6.1 Premier cas : $m > 1$

$$y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

avec :

$$r_1 = \left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = \left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0$$

Par conséquent :

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t) \quad (14)$$

Il nous reste donc à calculer λ et μ .

Pour ce faire, précisons les conditions initiales.

À $t = 0$ s, le condensateur C est déchargé donc $y(0) = 0$ volt .

Faisons $t = 0$ dans l'expression (14) :

$$y(0) = 0 = \lambda + \mu + K$$

Calculons maintenant la dérivée de $y(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = r_1 e^{r_1 t} \lambda + r_2 e^{r_2 t} \mu - K \omega \sin(\omega t) + M \omega \cos(\omega t) \quad (15)$$

À $t = 0$ s, le courant $i(t) = i(0)$ est nul. Donc :

$$\frac{dy(0)}{dt} = \frac{1}{C} i(0) = 0$$

Faisons $t = 0$ dans l'expression (15) :

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0 = r_1 \lambda + r_2 \mu + M \omega$$

Nous avons donc un système de deux équations à deux inconnues λ et μ :

$$\lambda + \mu = -K$$

$$r_1 \lambda + r_2 \mu = -M \omega$$

Ce qui donne :

$$\lambda = \frac{M \omega - r_2 K}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{r_1 K - M \omega}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0}$$

Dans l'expression de la solution $y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, remarquons que $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$. Les deux exponentielles vont donc s'éteindre au bout d'un « certain temps ».

Application numérique et graphes

$$L = 2,533 \text{ H} \quad C = 100 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62,83222 \text{ rad/s} \text{ soit } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10 \text{ Hz} \text{ et } T_0 = \frac{1}{f_0} \sim 0,1 \text{ s}.$$

$$m = 2 \Rightarrow R = 2mL\omega_0 \sim 636,62 \text{ } \Omega$$

Exemple purement théorique avec des composants parfaits !

Signal d'entrée :

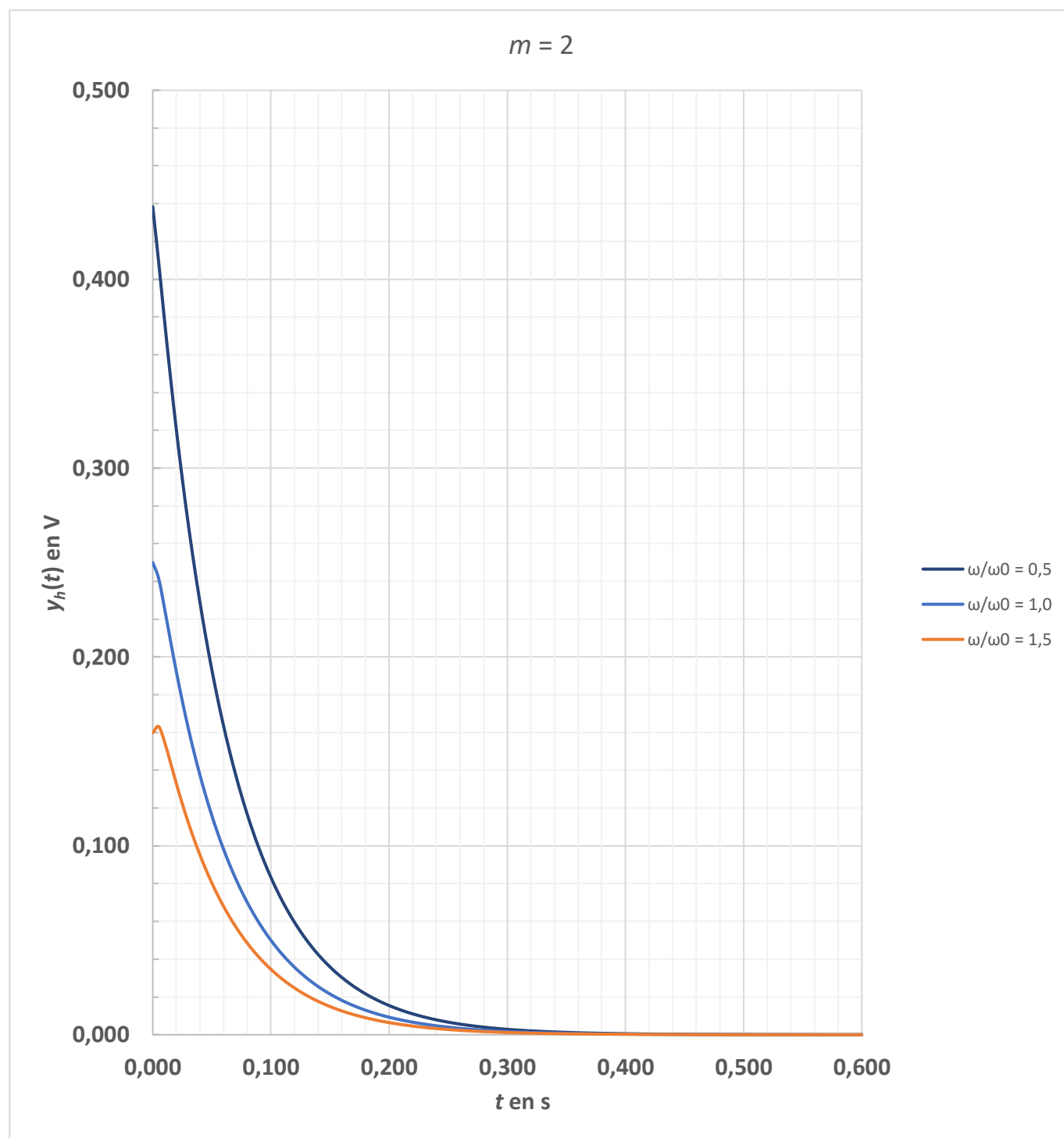
$x(t) = \sin(\omega t)$, donc $E = 1 \text{ V}$, et prenons trois valeurs de pulsation ω telles que ω/ω_0 vaille successivement 0,5 puis 1 et enfin 1,5.

Voir les trois graphes pages suivantes.

Ce premier graphe représente la solution de l'équation *homogène* $y_h(t)$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0,438$ V ; $0,250$ V ; $0,160$ V, selon la fréquence du signal d'entrée.

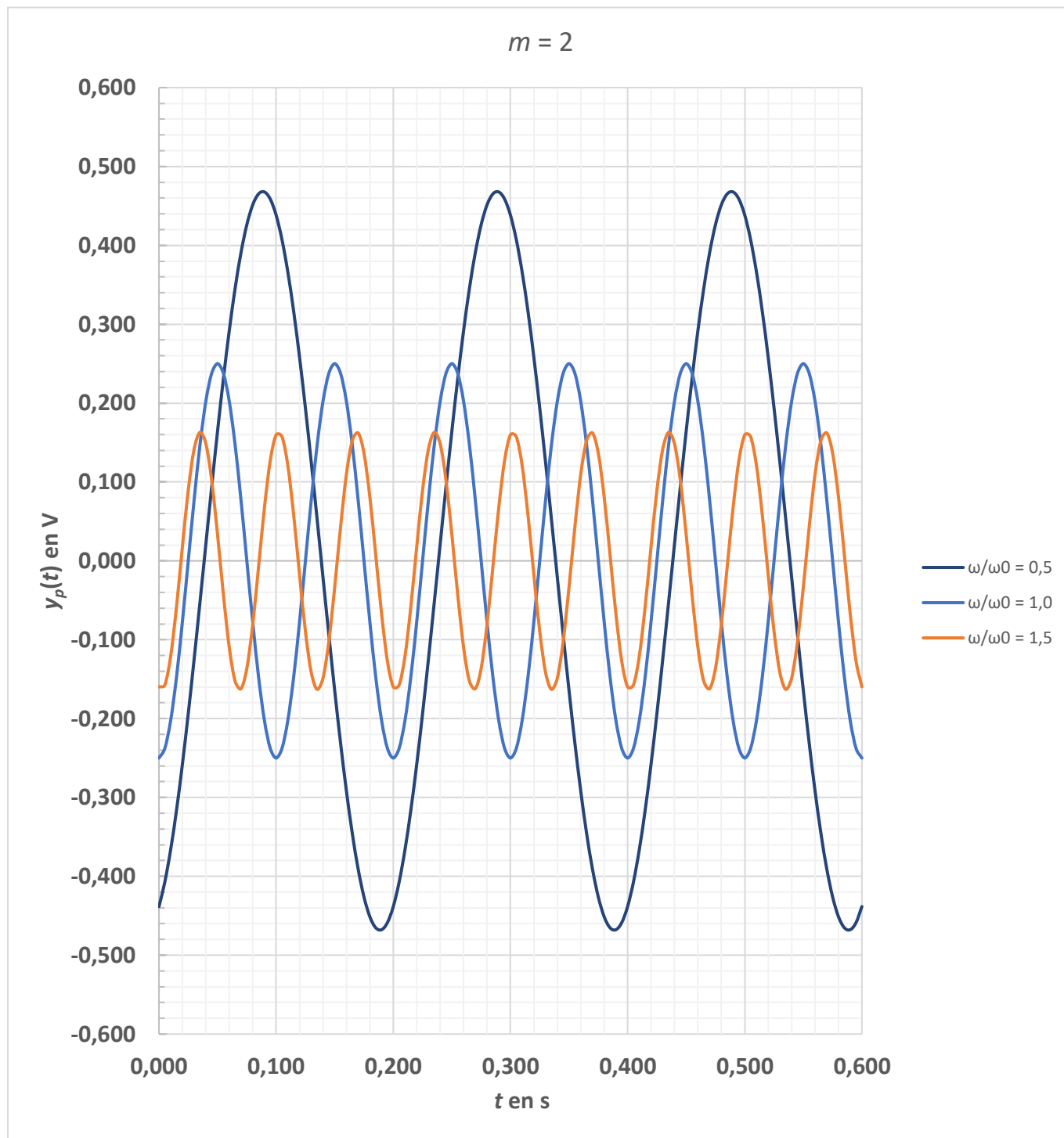
À $t = 4T_0$, $y_h(t) = y_h(4T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Ce deuxième graphe représente la solution *particulière* $y_p(t)$.

Il s'agit donc du tracé sinusoïdal régulier attendu.

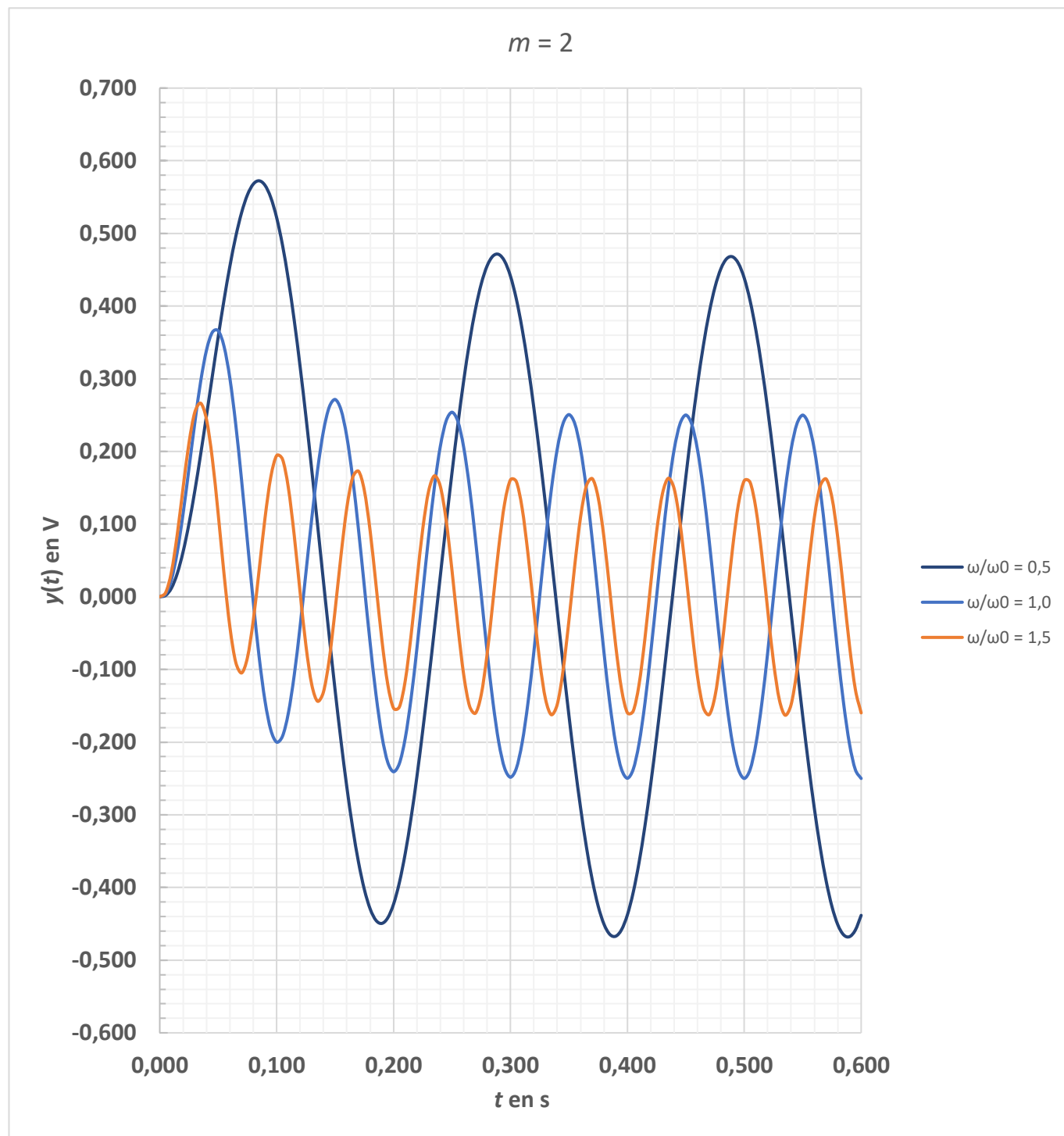
À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0,438$ V ; $-0,250$ V ; $-0,160$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$!



Ce troisième graphe représente la solution de l'équation différentielle $y(t)$ posée en (3).

Il s'agit donc de la somme $y_h(t) + y_p(t)$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



Interprétation

À $t = 0$ s, nous avons les conditions initiales suivantes : la tension aux bornes de C est nulle et il n'y a pas de courant dans le circuit.

Nous appliquons alors une tension sinusoïdale à l'entrée du filtre.

S'ensuivent deux phases successives :

a) la phase transitoire au démarrage, pendant quelques périodes T_0 .

La tension du signal à la sortie du filtre est égale à la somme de la tension donnée par la solution de l'équation *homogène* et de la tension donnée par la solution *particulière* ;

b) puis la tension donnée par la solution de l'équation *homogène* s'éteint et ne subsiste que la tension donnée par la solution *particulière*.

Cette solution *particulière* est directement accessible en utilisant les nombres complexes (partie 1, section A).

6.2 Deuxième cas : $m = 1$

$$y_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$$

avec :

$$r = -\omega_0$$

Par conséquent :

$$y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt} + K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t) \quad (16)$$

Il nous reste donc à calculer λ et μ .

Pour ce faire, précisons les conditions initiales.

À $t = 0$ s, le condensateur C est déchargé donc $y(0) = 0$ volt .

Faisons $t = 0$ dans l'expression (16) :

$$y(0) = 0 = \mu + K, \text{ donc } \mu = -K.$$

Calculons maintenant la dérivée de $y(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda e^{rt} + r(\lambda t + \mu)e^{rt} - K\omega \sin(\omega t) + M\omega \cos(\omega t) \quad (17)$$

À $t = 0$ s, le courant $i(t) = i(0)$ est nul. Donc :

$$\frac{dy(0)}{dt} = \frac{1}{C}i(0) = 0$$

Faisons $t = 0$ dans l'expression (17) :

$$\begin{aligned} \frac{dy(0)}{dt} = 0 &= \lambda + r\mu + M\omega \\ \lambda &= -r\mu - M\omega = rK - M\omega \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\lambda = rK - M\omega \quad \text{et} \quad \mu = -K$$

Dans l'expression de la solution $y_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$, remarquons que $r < 0$.

L'exponentielle va donc s'éteindre au bout d'un « certain temps ».

Application numérique et graphes

Reprenons les mêmes données qu'au paragraphe 6.1.

$$L = 2,533 \text{ H} \quad C = 100 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62,83222 \text{ rad/s} \text{ soit } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10 \text{ Hz} \text{ et } T_0 = \frac{1}{f_0} \sim 0,1 \text{ s}$$

$$\text{Cette fois-ci } m=1 \Rightarrow R = 2mL\omega_0 \sim 318,31 \text{ } \Omega$$

Exemple purement théorique avec des composants parfaits !

Signal d'entrée :

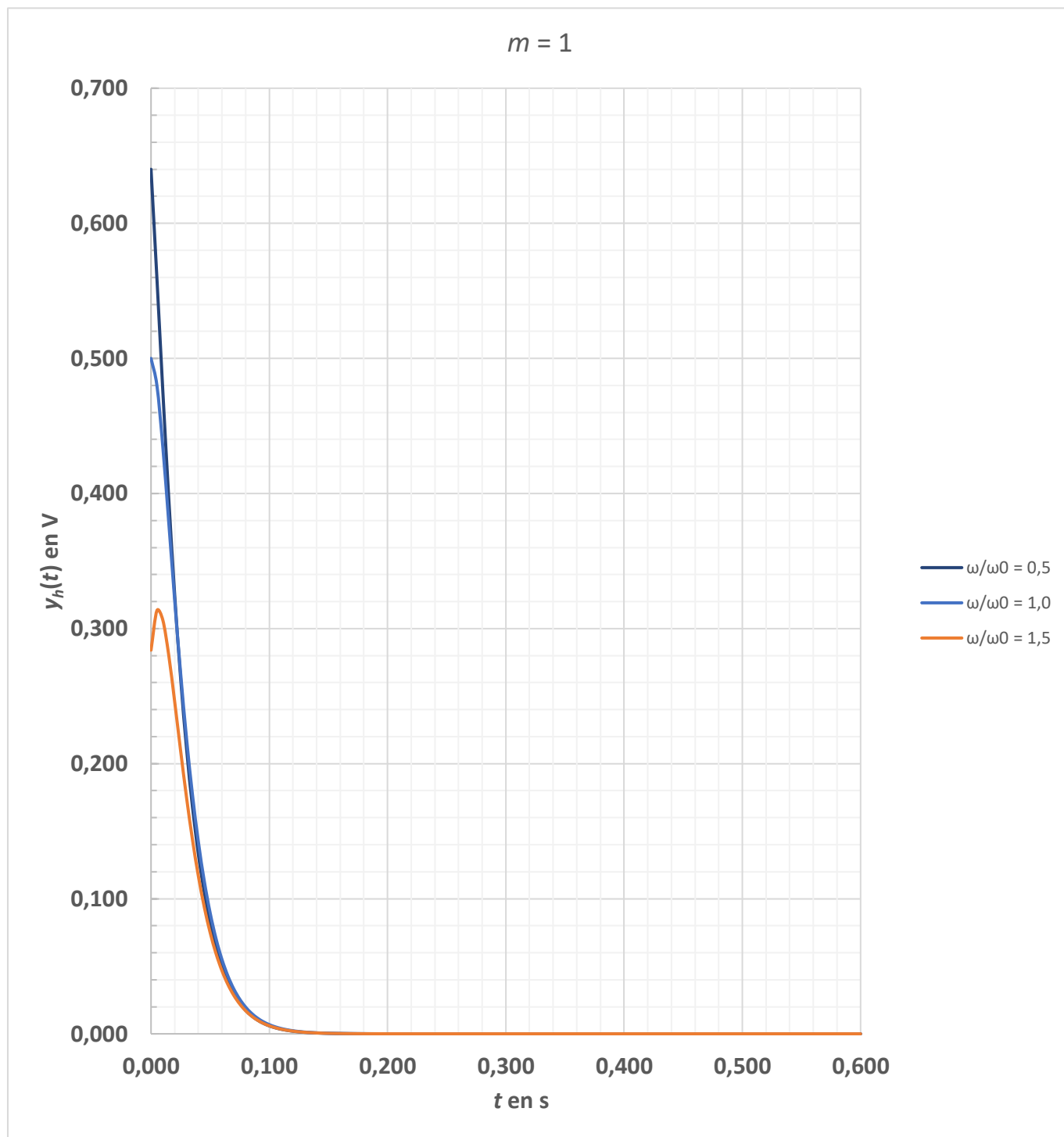
$x(t) = \sin(\omega t)$, donc $E = 1 \text{ V}$, et prenons trois valeurs de pulsation ω telles que ω/ω_0 vaille successivement 0,5 puis 1 et enfin 1,5.

Voir les trois graphes pages suivantes.

Ce premier graphe représente la solution de l'équation *homogène* $y_h(t)$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0,640$ V ; $0,500$ V ; $0,284$ V, selon la fréquence du signal d'entrée.

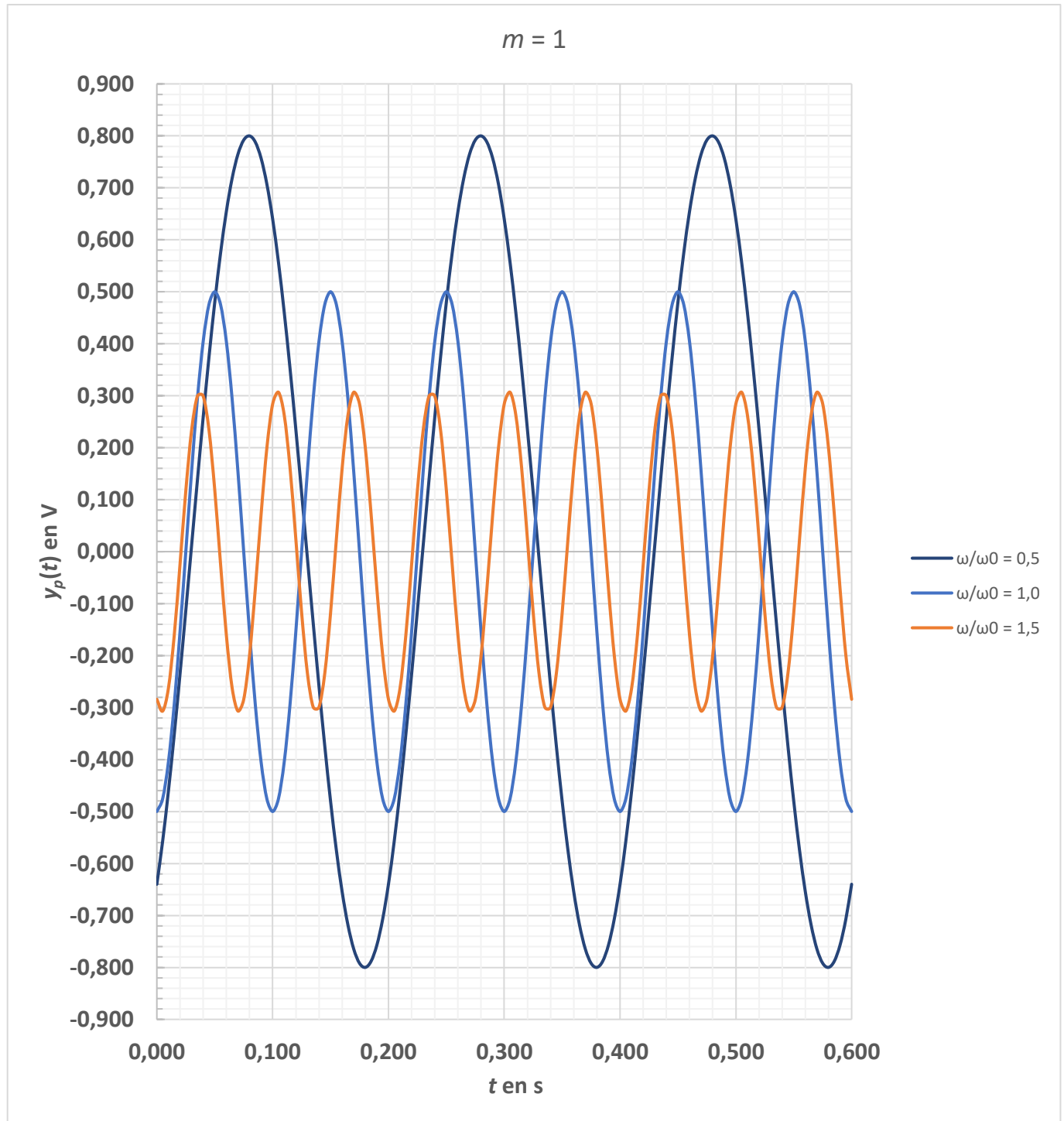
À $t = 2T_0$, $y_h(t) = y_h(2T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Ce deuxième graphe représente la solution *particulière* $y_p(t)$.

Il s'agit donc du tracé sinusoïdal régulier attendu.

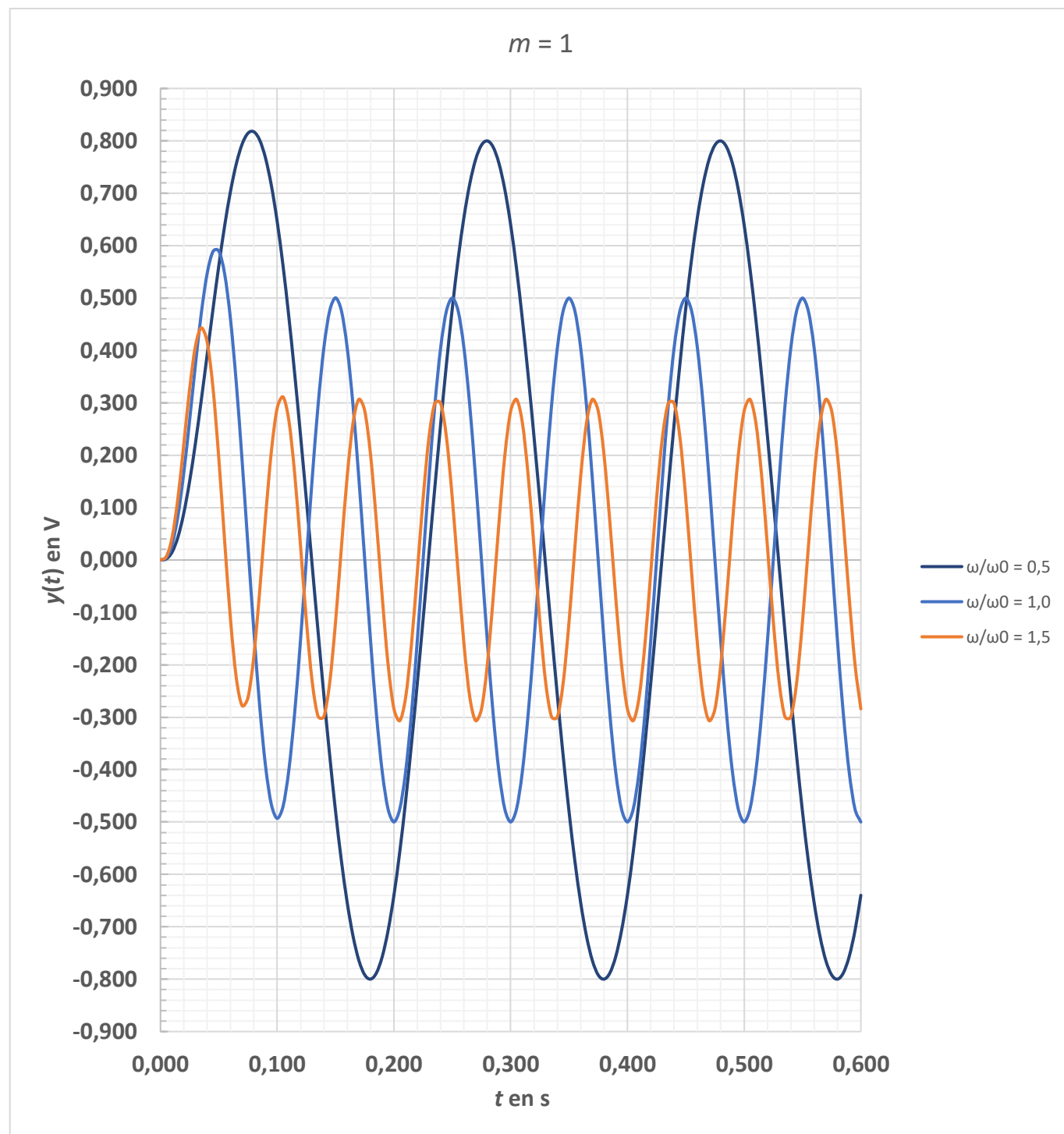
À $t=0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0,640$ V ; $-0,500$ V ; $-0,284$ V , selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$!



Ce troisième graphe représente la solution de l'équation différentielle $y(t)$ posée en (3).

Il s'agit donc de la somme $y_h(t) + y_p(t)$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



Interprétation

Même interprétation qu'au paragraphe 6.1.

6.3 Troisième cas : $m < 1$

$$y_h(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

avec :

$$\alpha = -m\omega_0$$

$$\beta = \sqrt{1 - m^2} \omega_0$$

Par conséquent :

$$y(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) + K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t)$$

soit :

$$y(t) = e^{\alpha t} [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] + K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t) \quad (18)$$

Il nous reste donc à calculer λ et μ .

Pour ce faire, précisons les conditions initiales.

À $t = 0$ s, le condensateur C est déchargé donc $y(0) = 0$ volt.

Faisons $t = 0$ dans l'expression (18) :

$$y(0) = 0 = \lambda + K, \text{ donc } \lambda = -K$$

Calculons maintenant la dérivée de $y(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^{\alpha t} [\alpha \lambda \cos(\beta t) + \alpha \mu \sin(\beta t) - \beta \lambda \sin(\beta t) + \beta \mu \cos(\beta t)] - K \omega \sin(\omega t) + M \omega \cos(\omega t) \quad (19)$$

À $t = 0$ s, le courant $i(t) = i(0)$ est nul. Donc :

$$\frac{dy(0)}{dt} = \frac{1}{C} i(0) = 0$$

Faisons $t = 0$ dans l'expression (19) :

$$\begin{aligned} \frac{dy(0)}{dt} = 0 &= \alpha \lambda + \beta \mu + M \omega \\ \mu &= \frac{-\alpha \lambda - M \omega}{\beta} = \frac{\alpha K - M \omega}{\beta} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\lambda = -K \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\alpha K - M \omega}{\beta}$$

Dans l'expression de la solution $y_h(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, remarquons que $\alpha < 0$.

L'exponentielle va donc s'éteindre au bout d'un « certain temps ».

Application numérique et graphes

Reprenons les mêmes données qu'au paragraphe 6.1.

$$L = 2,533 \text{ H} \quad C = 100 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62,83222 \text{ rad/s} \text{ soit } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10 \text{ Hz} \text{ et } T_0 = \frac{1}{f_0} \sim 0,1 \text{ s}$$

$$\text{Cette fois-ci } m = \sqrt{2}/2 \Rightarrow R = 2mL\omega_0 \sim 225,08 \text{ } \Omega$$

$$\text{puis } m = 0,3 \Rightarrow R \sim 95,49 \text{ } \Omega$$

$$\text{et } m = 0,1 \Rightarrow R \sim 31,83 \text{ } \Omega$$

Exemples purement théoriques avec des composants parfaits !

Signal d'entrée :

$x(t) = \sin(\omega t)$, donc $E = 1 \text{ V}$, et prenons trois valeurs de pulsation ω telles que ω/ω_0 vaille successivement 0,5 puis 1 et enfin 1,5.

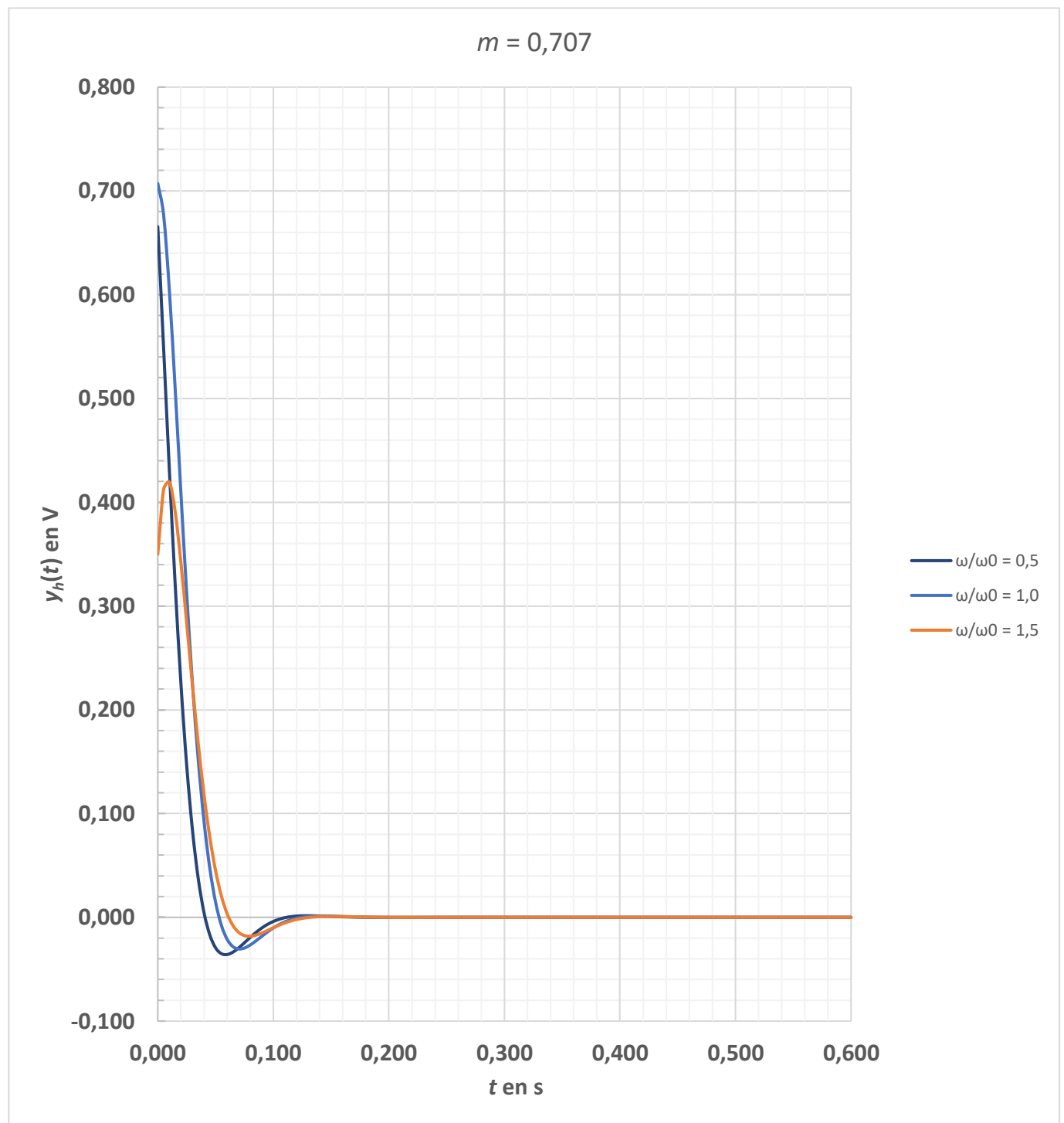
Voir les neuf graphes pages suivantes.

Les trois graphes suivants représentent la solution de l'équation *homogène* $y_h(t)$.

Le premier graphique ci-dessous correspond au cas $m = \sqrt{2} / 2 \sim 0,707$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0,666$ V ; $0,707$ V ; $0,350$ V, selon la fréquence du signal d'entrée.

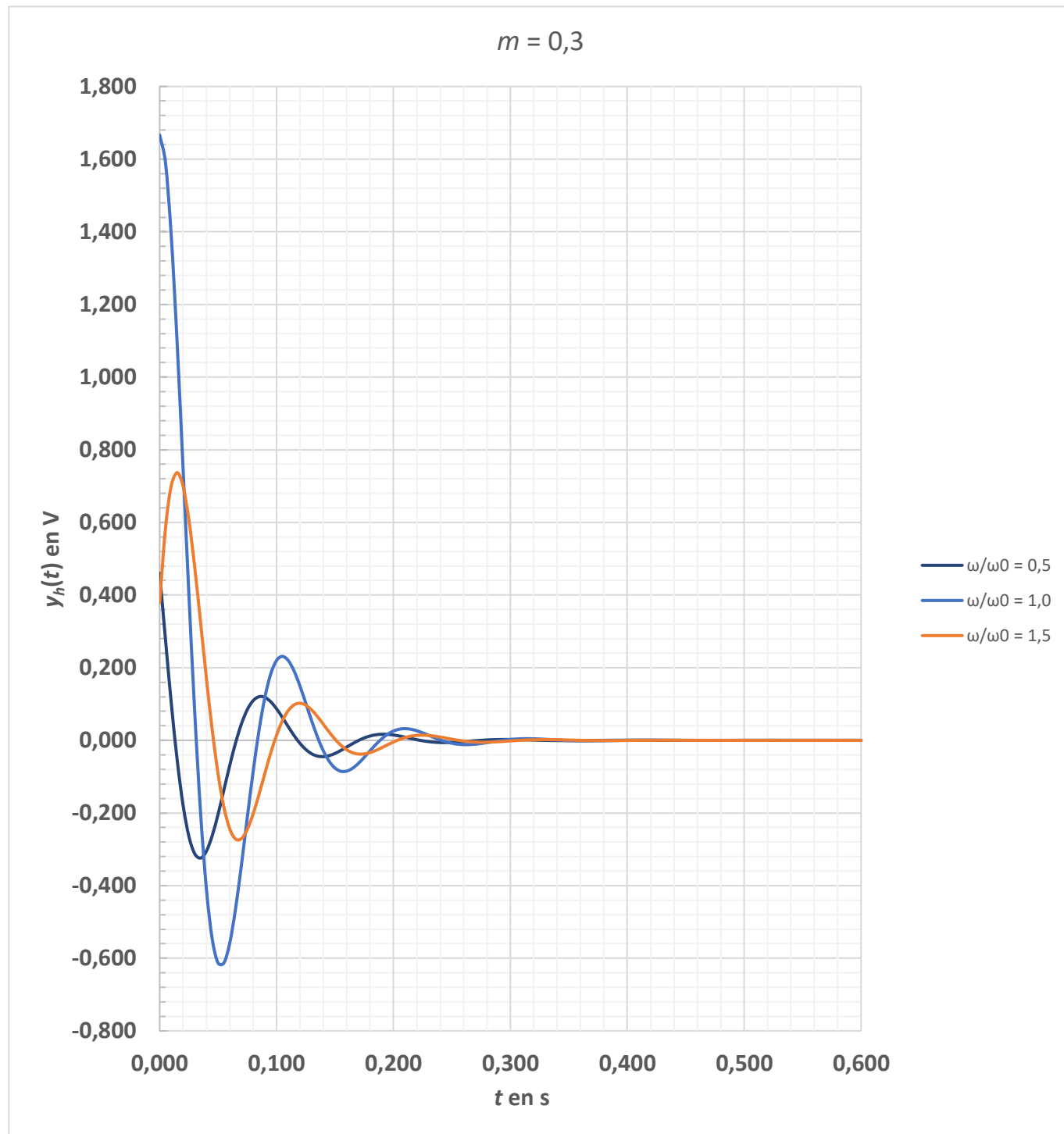
À $t = 1,5T_0$, $y_h(t) = y_h(1,5T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0,3$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0,460$ V ; $1,667$ V ; $0,379$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. La surtension apparaît ($1,667$ V pour $\omega = \omega_0$) car maintenant le coefficient d'amortissement m est petit devant 1.

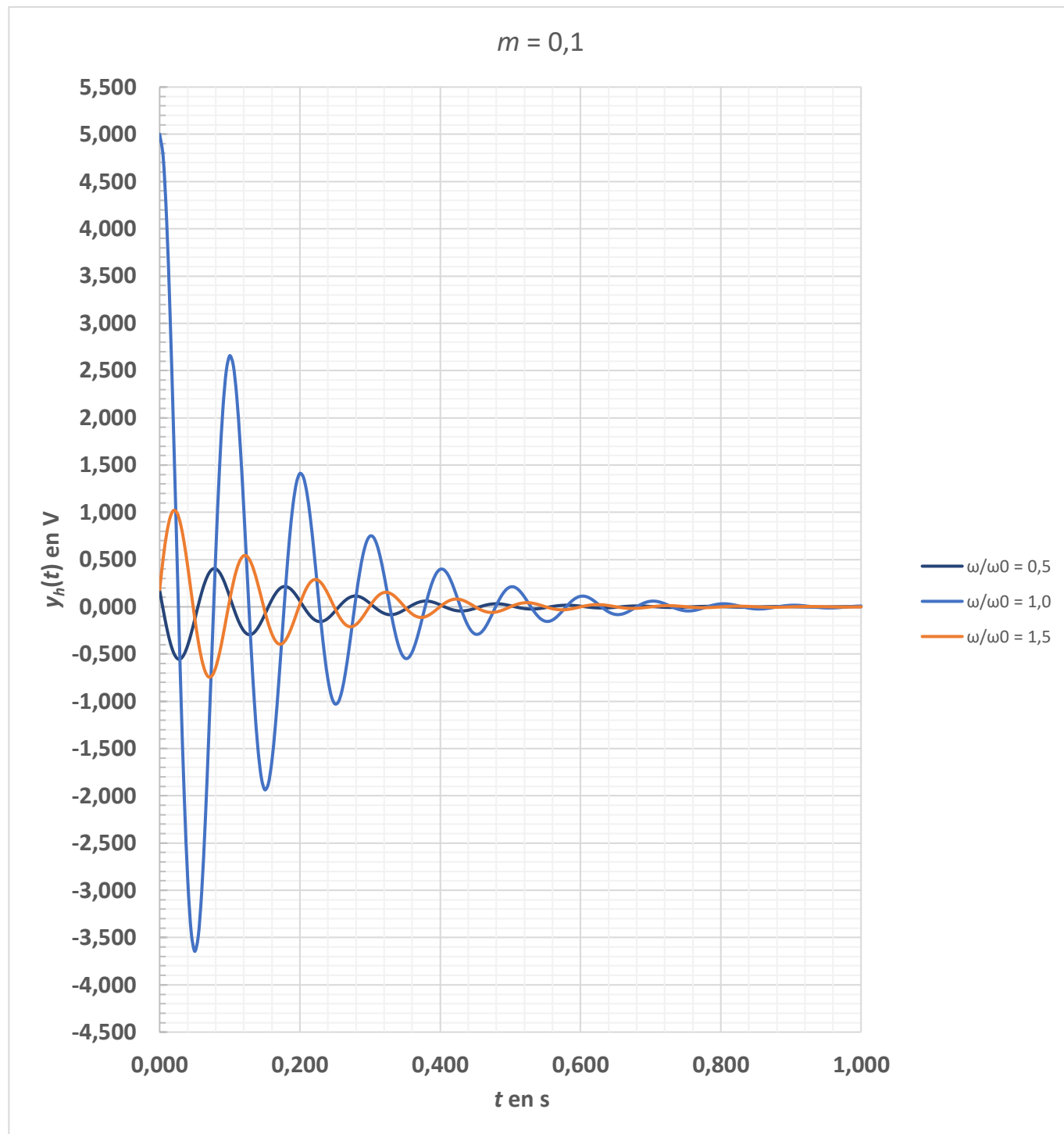
À $t = 3T_0$, $y_h(t) = y_h(3T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint.



Le troisième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0,1$.

À $t = 0$ s, $y_h(t) = y_h(0) = 0,175$ V ; 5,000 V ; 0,182 V, selon la fréquence du signal d'entrée. La surtension est encore plus forte (5 V pour $\omega = \omega_0$) car maintenant le coefficient d'amortissement m est dix fois plus petit que 1.

À $t = 10T_0$, $y_h(t) = y_h(10T_0) \sim 0$ V : le « signal *homogène* » s'éteint. Ce temps s'allonge quand le coefficient d'amortissement diminue fortement en dessous de 1.

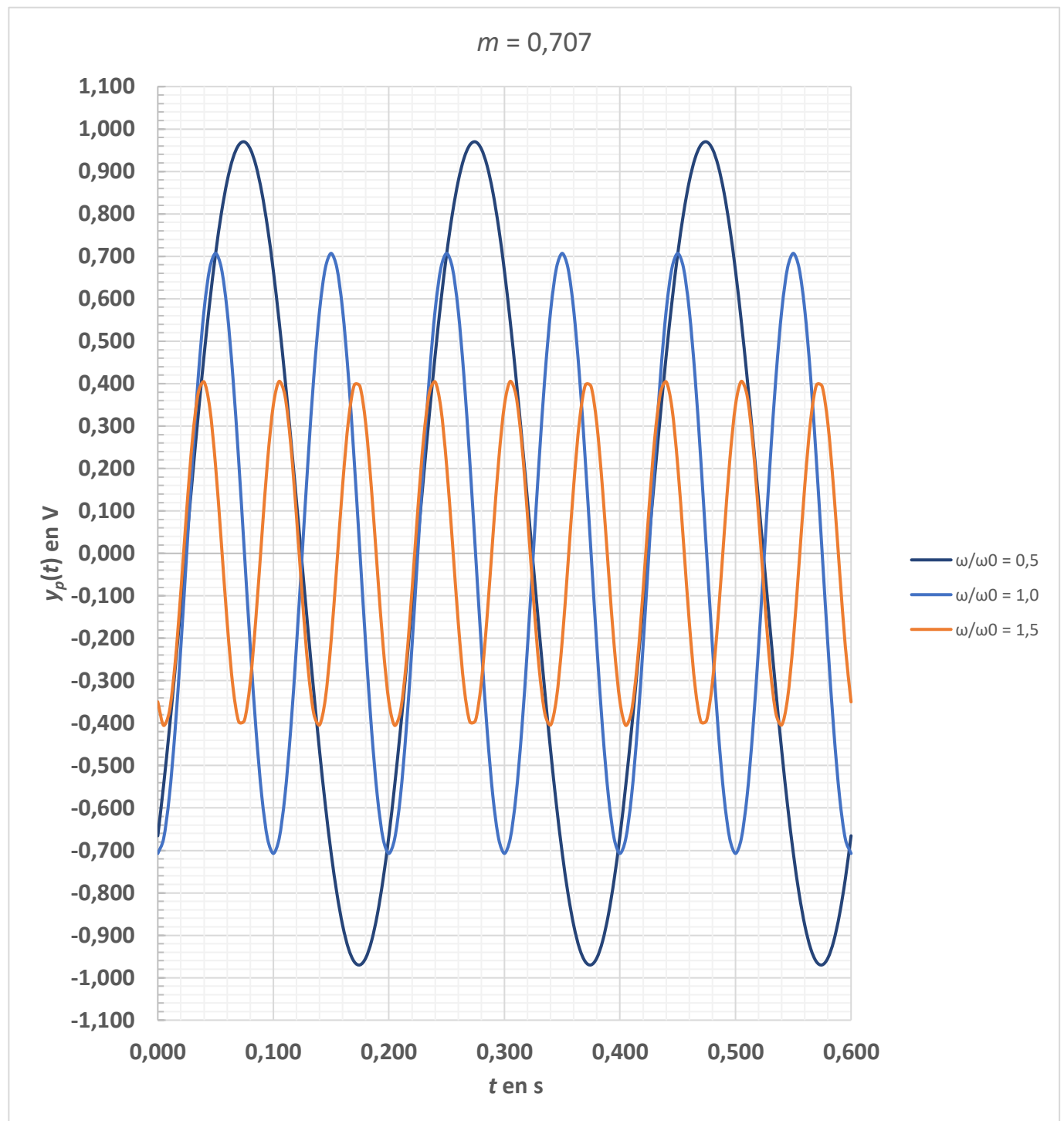


Les trois graphes suivants représentent la solution *particulière* $y_p(t)$.

Il s'agit donc du tracé sinusoïdal régulier attendu.

Le premier graphe ci-dessous correspond au cas $m = \sqrt{2} / 2 \sim 0,707$.

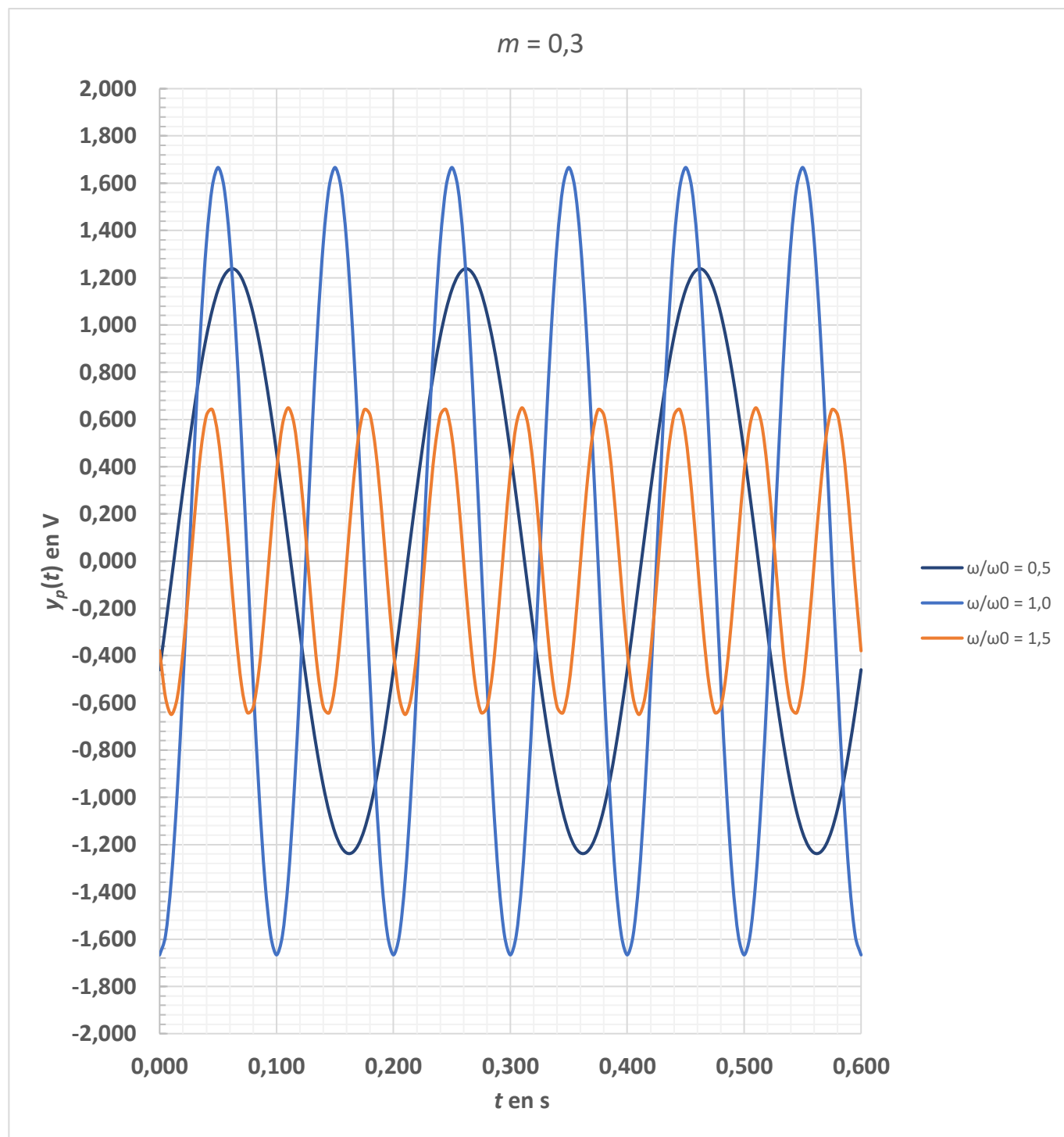
À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0,666$ V ; $-0,707$ V ; $-0,350$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$!



Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0,3$.

Il s'agit donc toujours du tracé sinusoïdal régulier attendu.

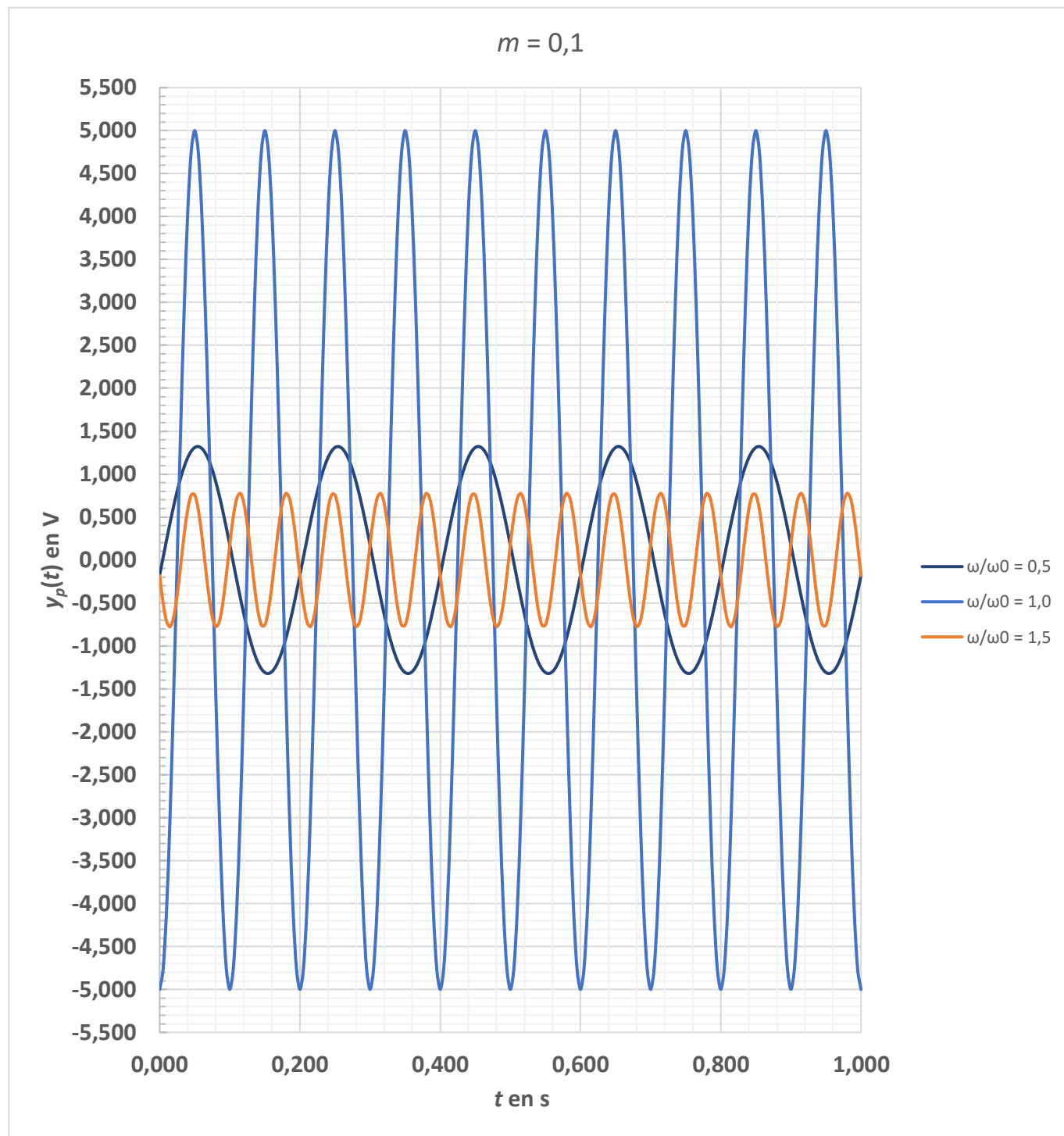
À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0,460$ V ; $-1,667$ V ; $-0,379$ V, selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$!



Le troisième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0,1$.

Il s'agit donc toujours du tracé sinusoïdal régulier attendu.

À $t = 0$ s, $y_p(t) = y_p(0) = -0,175$ V ; $-5,000$ V ; $-0,182$ V , selon la fréquence du signal d'entrée. Des valeurs opposées à celles de $y_h(0)$!

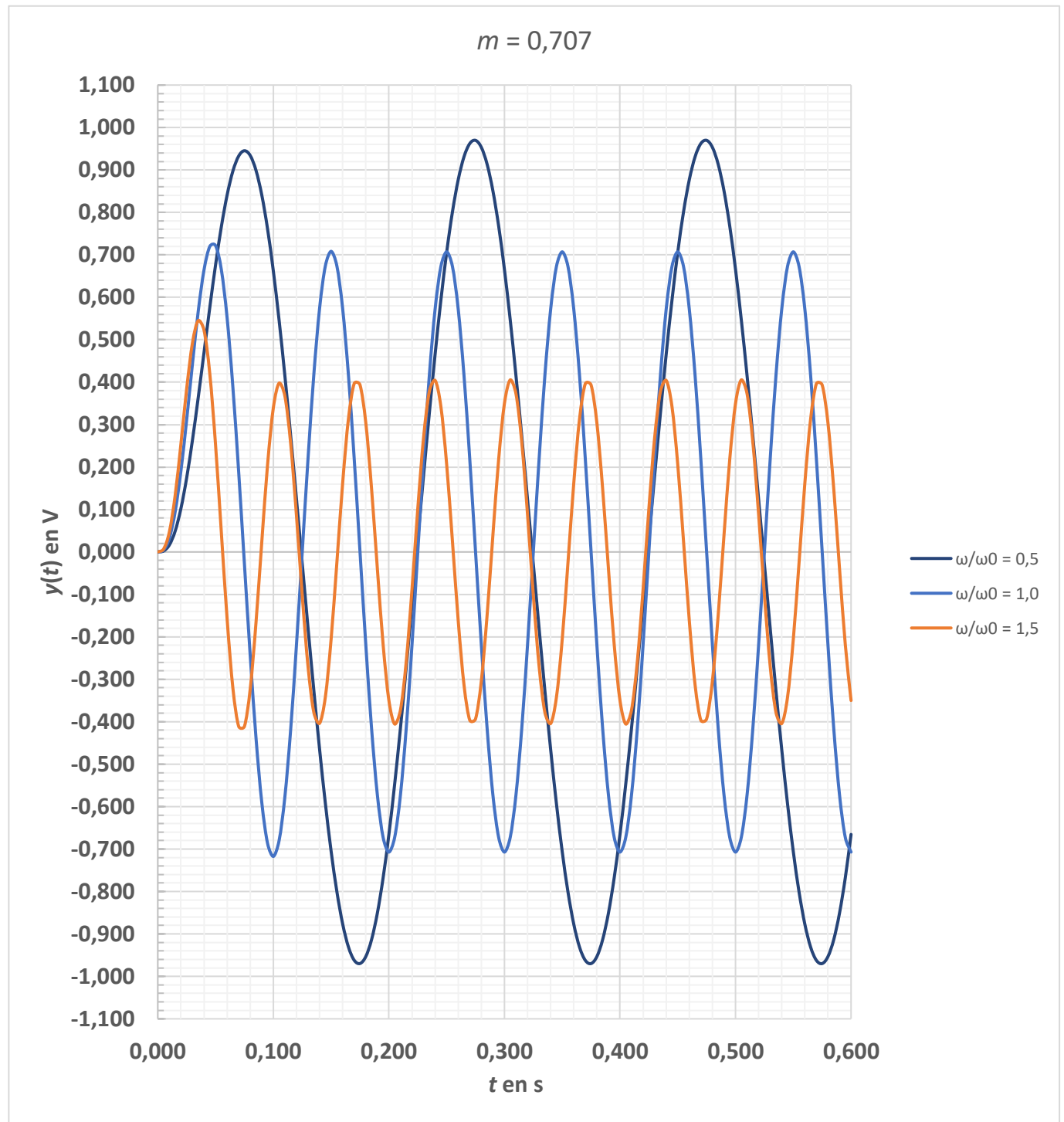


Les trois graphes suivants représentent la solution de l'équation différentielle $y(t)$ posée en (3).

Il s'agit donc de la somme $y_h(t) + y_p(t)$.

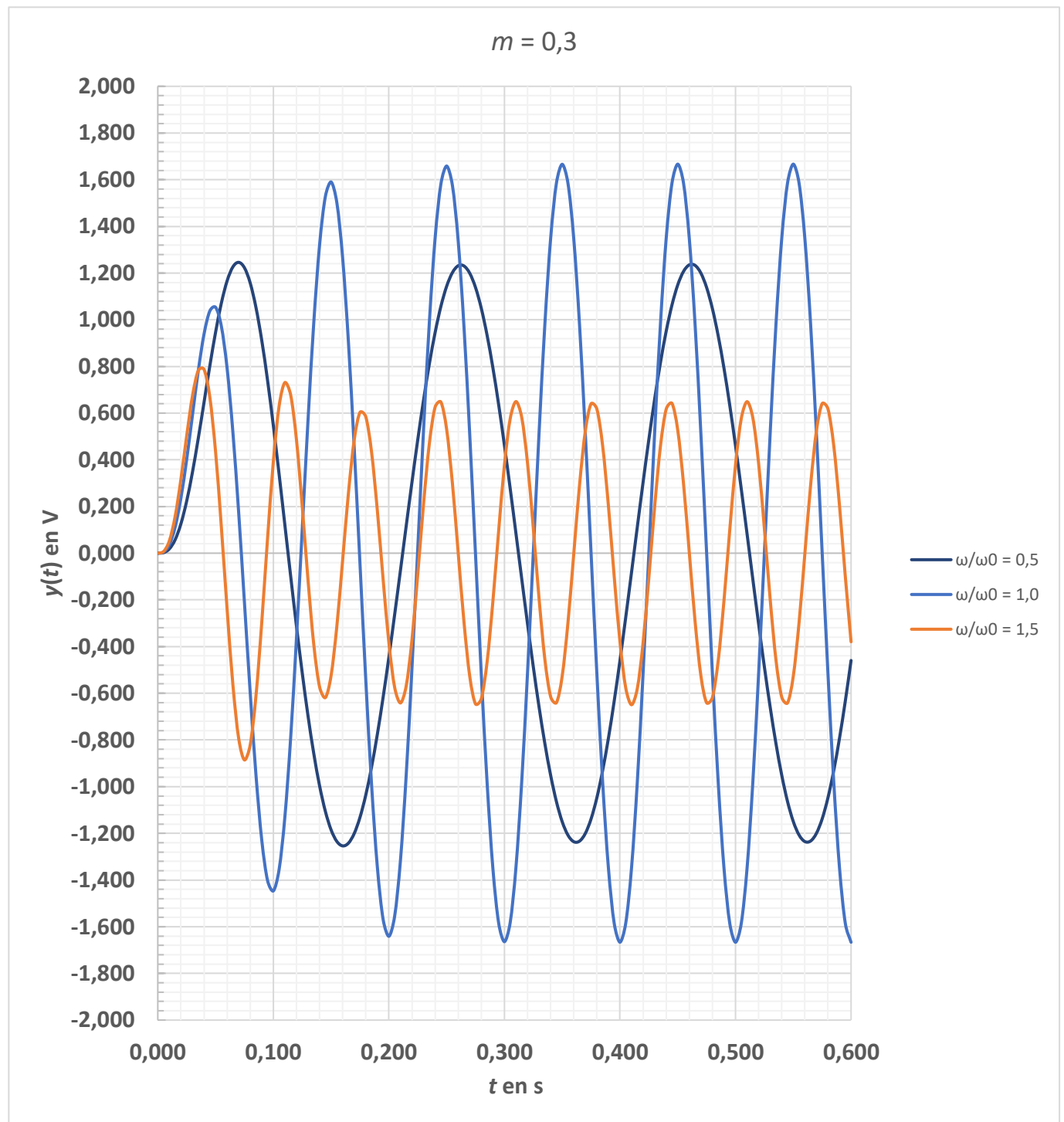
Le premier graphe ci-dessous correspond au cas $m = \sqrt{2} / 2 \sim 0,707$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



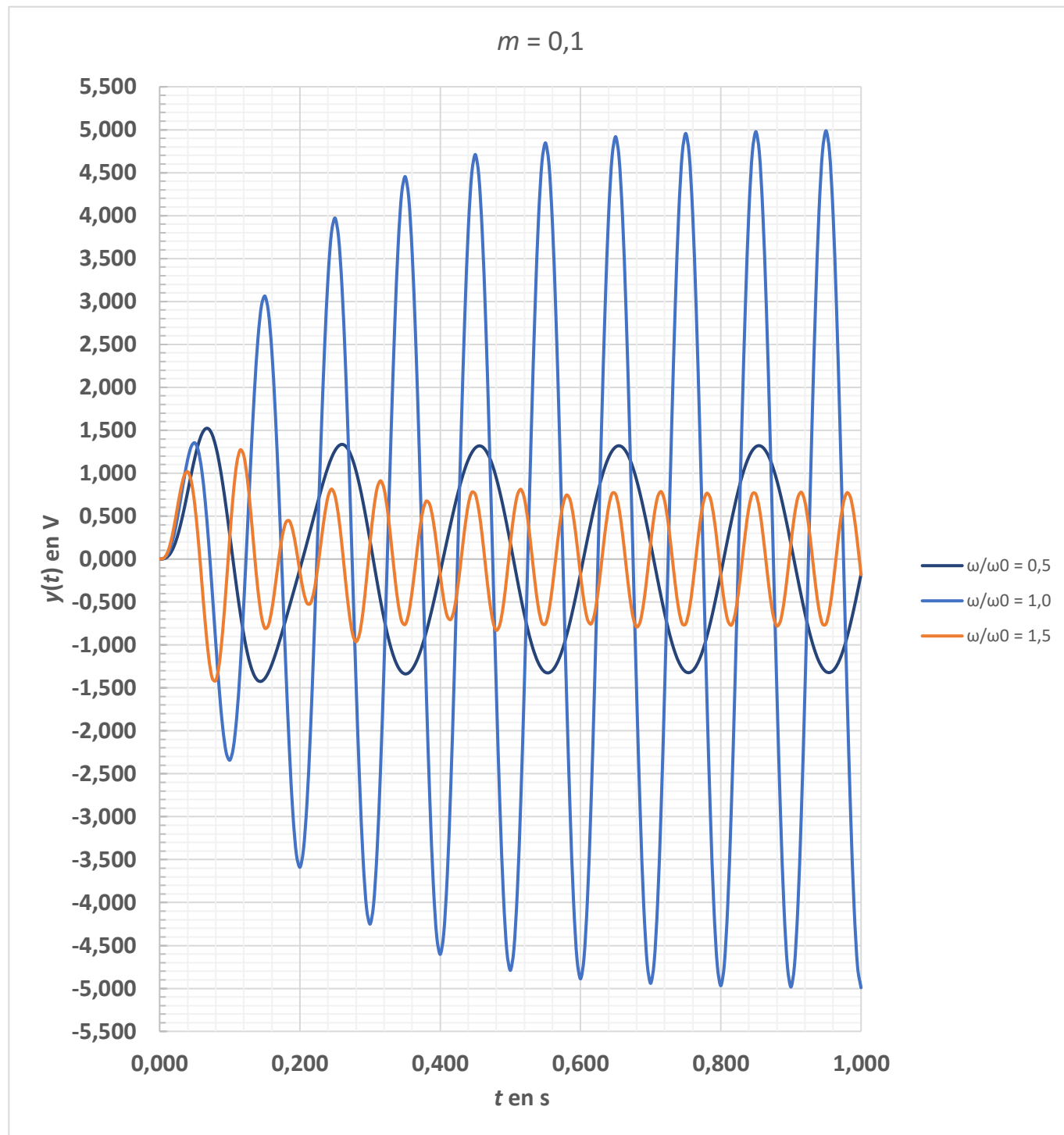
Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0,3$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



Le deuxième graphe ci-dessous correspond au cas $m = 0,1$.

À $t = 0$ s, $y(t) = y(0) = 0$ V, ce qui répond à la question posée à la fin de la section A de la partie 1 !



Interprétation

Même interprétation qu'au paragraphe 6.1.

7. Synthèse des expressions

7.1 L'équation différentielle

$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) = E \sin(\omega t)$$

ou

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2m \frac{1}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) = E \sin(\omega t)$$

avec :

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad m = \frac{1}{2Q}$$

$$K = \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} E \quad M = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} E$$

7.2 En régime établi

$$y(t) \sim y_p(t) = K \cos(\omega t) + M \sin(\omega t)$$

ou

$$y(t) \sim y_p(t) = \sqrt{K^2 + M^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

avec :

$$\sin(\varphi) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + M^2}} \quad \cos(\varphi) = \frac{M}{\sqrt{K^2 + M^2}}$$

$\varphi = \text{atan2}(M; K)$, avec Excel.

$$\text{- si } \omega < \omega_0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

$$\text{- si } \omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{- si } \omega > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$$

$$|G(\omega)| = \frac{\sqrt{K^2 + M^2}}{E} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

7.3 Quel que soit t : régime transitoire suivi du régime établi

7.3.1 Première cas : $m > 1$

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + y_p(t)$$

avec :

$$r_1 = \left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right) \omega_0 \quad r_2 = \left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \omega_0$$

$$\lambda = \frac{M\omega - r_2 K}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right) \omega_0} \quad \mu = \frac{r_1 K - M\omega}{\left(2\sqrt{m^2 - 1}\right) \omega_0}$$

7.3.2 Deuxième cas : $m = 1$

$$y(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt} + y_p(t)$$

Faire $m = 1$ dans les expressions de K et M .

avec :

$$r = -\omega_0$$

$$\lambda = rK - M\omega \quad \mu = -K$$

7.3.3 Troisième cas : $m < 1$

$$y(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) + y_p(t)$$

avec :

$$\alpha = -m\omega_0 \quad \beta = \sqrt{1 - m^2} \omega_0$$

$$\lambda = -K \quad \mu = \frac{\alpha K - M\omega}{\beta}$$