

Filtres RLC, avec C en sortie

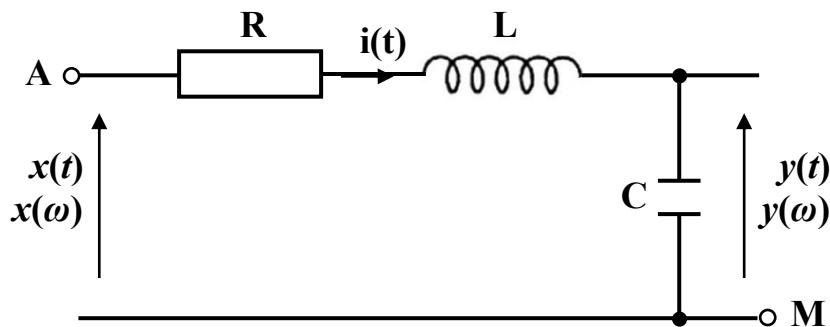
Jean-Pierre Waymel, F5FOD
30 juin 2025

v02

Résumé

Le but final de cette série d'articles est de s'initier aux filtres numériques.

À titre d'exemple concret, nous allons étudier la réponse de ce filtre du second ordre à un signal sinusoïdal :



Il s'agira donc d'abord d'un filtre équipé de vrais composants passifs (Partie 1), filtre dont nous calculerons la réponse de trois façons différentes :

- en utilisant les impédances complexes (Section A),
- en utilisant la transformée de Laplace (Section B),
- en résolvant l'équation différentielle, ce qui nous permettra de calculer également la réponse transitoire « au démarrage » (Section C).

Puis nous remplacerons les composants par un filtre numérique (Partie 2), filtre dont nous établirons l'équation de deux façons différentes :

- par l'approximation des différences finies (Section D),
- par l'approximation de Tustin (équation bilinéaire) et la transformée en z (Section E).

Pour terminer, nous comparerons avec la réponse donnée par une simulation LTspice (Section F).

Partie 1. Filtre analogique, avec de vrais composants R, L et C passifs

Section A. En utilisant les impédances complexes

1. Le gain en tension

Nous supposons le lecteur familier avec les calculs mettant en jeu les nombres complexes.

$$\text{Condensateur } C : \frac{1}{jC\omega} \quad \text{Bobinage } L : jL\omega \quad \text{Résistance } R : R$$

Le gain en tension $G(\omega)$ a pour expression complexe :

$$G(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$

soit :

$$G(\omega) = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \quad (1)$$

2. Les expressions canoniques

Soit ω_0 la pulsation de résonance du circuit LC et Q son facteur de qualité :

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Nous pouvons alors exprimer les produits LC et RC de la façon suivante :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{Q\omega_0}$$

et écrire ainsi l'expression (1) :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (2)$$

Allons plus loin encore en notant $m = \frac{1}{2Q}$, m étant le coefficient d'amortissement :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2jm\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (3)$$

3. Le module du gain en tension

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (4)$$

Les deux asymptotes dans le plan de Bode

a) Quand $\omega \ll \omega_0$, alors $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ et $|G(\omega)| \rightarrow 1$.

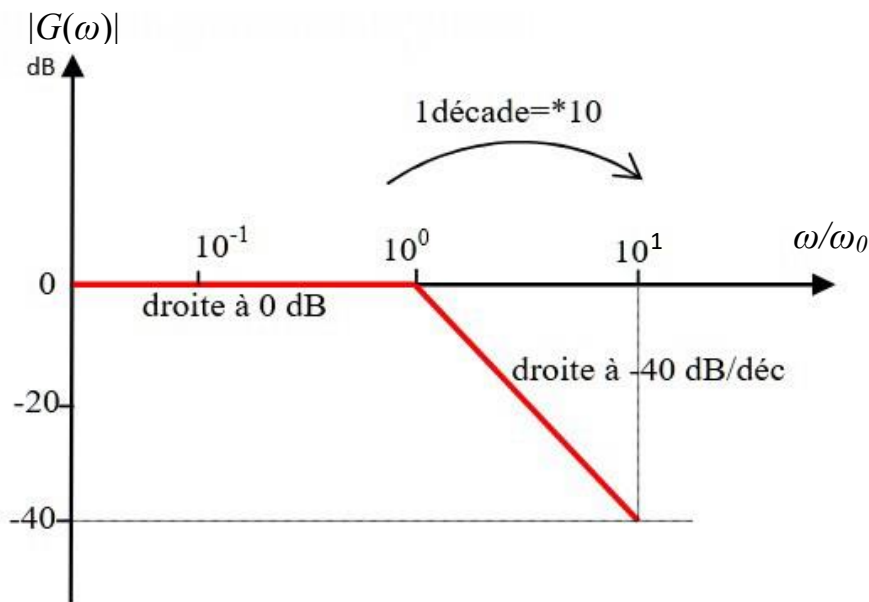
Exprimé en dB : $20 \log |G(\omega)| \rightarrow 0 \text{ dB}$.

b) Quand $\omega \gg \omega_0$, alors $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et $|G(\omega)| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4}}} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$.

Exprimé en dB : $20 \log |G(\omega)| \rightarrow -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_0} \text{ dB}$.

Pour $\omega = 10\omega_0$ (une décade), $20 \log |G(\omega)| \rightarrow -40 \text{ dB}$.

Le filtre a alors une pente égale à -40 dB par décade.



(schéma emprunté à Ismaël Driouch, ENSAH)

L'échelle de pulsation (ou de fréquence) est logarithmique.

Les deux asymptotes se croisent en $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^0 = 1$, soit $\omega = \omega_0$, avec $|G(\omega)| = 0 \text{ dB}$ par convention.

4. La phase du gain en tension

Pour lever le doute sur le signe de $\varphi(\omega)$, transformons l'expression (3) de la façon suivante :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2jm \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - 2jm \frac{\omega}{\omega_0}}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2jm \frac{\omega}{\omega_0}\right] \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - 2jm \frac{\omega}{\omega_0}\right]}$$

soit :

$$G(\omega) = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - 2jm \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{Partie réelle de } G(\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\cos[\varphi(\omega)] = \frac{\text{Partie réelle de } G(\omega)}{|G(\omega)|} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\text{Partie imaginaire de } G(\omega) = \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\sin[\varphi(\omega)] = \frac{\text{Partie imaginaire de } G(\omega)}{|G(\omega)|} = \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$\Rightarrow \sin[\varphi(\omega)]$ est donc toujours négatif.

$$\tan[\varphi(\omega)] = \frac{\sin[\varphi(\omega)]}{\cos[\varphi(\omega)]} = \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (5)$$

- si $\omega < \omega_0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi(\omega) < 0$

- si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ et $\omega = \omega_0$: pulsation de résonance

- si $\omega > \omega_0 \Rightarrow -\pi < \varphi(\omega) < -\frac{\pi}{2}$

La phase est toujours négative.

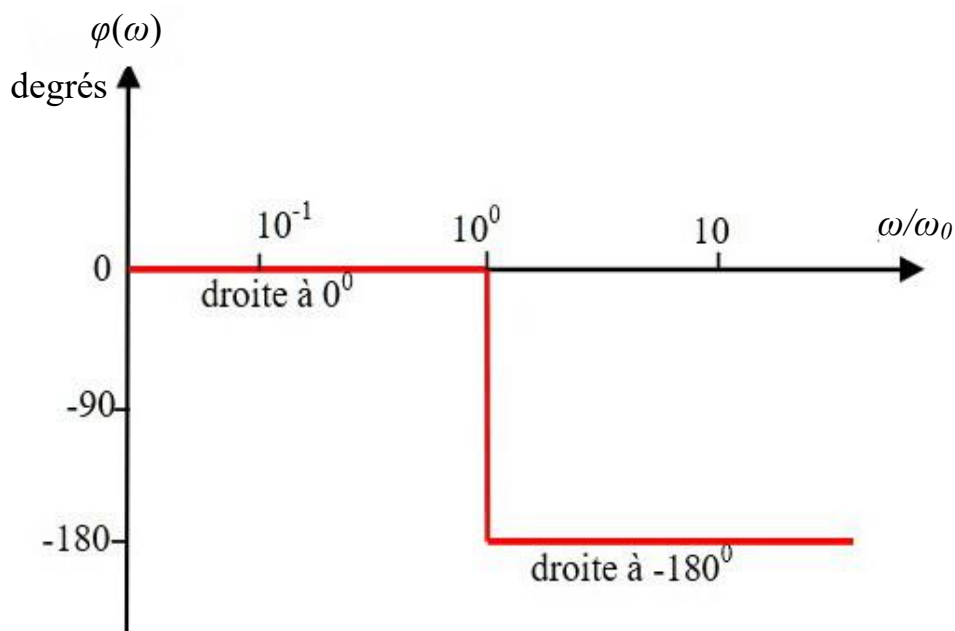
En utilisant Excel :

$$\varphi(\omega) = \text{atan2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}; -2m \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (6)$$

Les deux asymptotes dans le plan de Bode

a) Quand $\omega \ll \omega_0$, alors $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ et $\varphi(\omega) \rightarrow 0$.

b) Quand $\omega \gg \omega_0$, alors $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi$



5. Les trois « régimes » de fonctionnement du filtre

Notons $q = j \frac{\omega}{\omega_0}$. L'expression (3) devient :

$$G(q) = \frac{1}{q^2 + 2mq + 1}$$

Calculons le discriminant Δ du dénominateur : $\Delta = 4(m^2 - 1)$.

5.1 Premier cas : $m > 1$

Le discriminant Δ est positif. Il y a donc deux racines réelles : $-m \pm \sqrt{m^2 - 1}$.

Nous pouvons alors mettre $G(q)$ en facteurs :

$$G(q) = \frac{1}{(q + m - \sqrt{m^2 - 1})(q + m + \sqrt{m^2 - 1})}$$

Posons :

$$\omega_1 = \omega_0 (m - \sqrt{m^2 - 1}) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1})$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(j \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \left(j \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_2}{\omega_0}\right)} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{\omega_0} \left(j \frac{\omega}{\omega_1} + 1\right) \frac{\omega_2}{\omega_0} \left(j \frac{\omega}{\omega_2} + 1\right)} = \frac{1}{\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_0^2} \left(j \frac{\omega}{\omega_1} + 1\right) \left(j \frac{\omega}{\omega_2} + 1\right)}$$

Or $\omega_1 \omega_2 = \omega_0$, donc :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Notre filtre du second ordre est en réalité ici constitué d'une cascade de deux filtres du premier ordre !

5.2 Deuxième cas : $m = 1$

Le discriminant Δ est nul et $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$.

Par conséquent :

$$G(\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Notre filtre du second ordre est en réalité ici constitué d'une cascade de deux filtres identiques du premier ordre !

5.3 Troisième cas : $m < 1$

Le discriminant Δ est négatif. Donc pas de racines réelles pour le dénominateur de $G(q)$.

6. Y a-t-il un maximum pour le module du gain en tension ?

Notons $v = \frac{\omega}{\omega_0}$, donc $v > 0$, le cas $v = 0$ étant en effet exclu car la fréquence serait nulle !

L'expression (4) devient :

$$|G(v)| = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4m^2v^2}} = \frac{1}{\sqrt{P(v)}} = P(v)^{-1/2} \text{ avec } P(v) = (1-v^2)^2 + 4m^2v^2.$$

Calculons la dérivée de $|G(v)|$ par rapport à v :

$$\frac{d|G(v)|}{dv} = -\frac{1}{2} [2(-2v)(1-v^2) + 8m^2v] P^{-3/2} = 2v(-v^2 + 1 - 2m^2) P^{-3/2}$$

Cette dérivée s'annule quand $-v^2 + 1 - 2m^2 = 0$, soit quand $v = \sqrt{1 - 2m^2}$.

Ce qui nous donne une condition pour m : $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le signe de la dérivée est alors le signe de $-v^2 + 1 - 2m^2$, ce qui nous donne le tableau de variation suivant :

v	0	$\sqrt{1-2m^2}$	$+\infty$	avec $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{d G(v) }{dv}$	+	0	-	
$ G(v) $	1 (0 dB)	$\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$	0 ($-\infty$ dB)	

Le module du gain en tension présente donc un maximum quand $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce maximum

se produit à la pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$ et vaut $\frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$.

Quand $Q \geq 5$, $m \leq 0,1$ et $\sqrt{1 - 2m^2} \sim 1$. Le maximum du module du gain en tension a donc lieu à $\omega \sim \omega_0$.

Y a-t-il un maximum à ce maximum ?

Appelons $M(m)$ la valeur maximum du module du gain en tension, donc quand $m < \sqrt{2}/2$:

$$M(m) = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Calculons la dérivée de $M(m)$ par rapport à m :

$$\frac{dM(m)}{dm} = - \left[2\sqrt{1-m^2} + 2m \frac{1}{2} (-2m) \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \right] \frac{1}{4m^2(1-m^2)} = \frac{2m^2-1}{2m^2(1-m^2)\sqrt{1-m^2}}$$

Pour $0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2m^2-1 < 0$ et $1-m^2 > 0$.

Donc $\frac{dM(m)}{dm} < 0$ et $M(m)$ est strictement décroissante.

Quand $m \rightarrow 0$, $M(m) \rightarrow +\infty$ ($+\infty$ dB).

Quand $m \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$, $M(m) \rightarrow 1$ (0 dB).

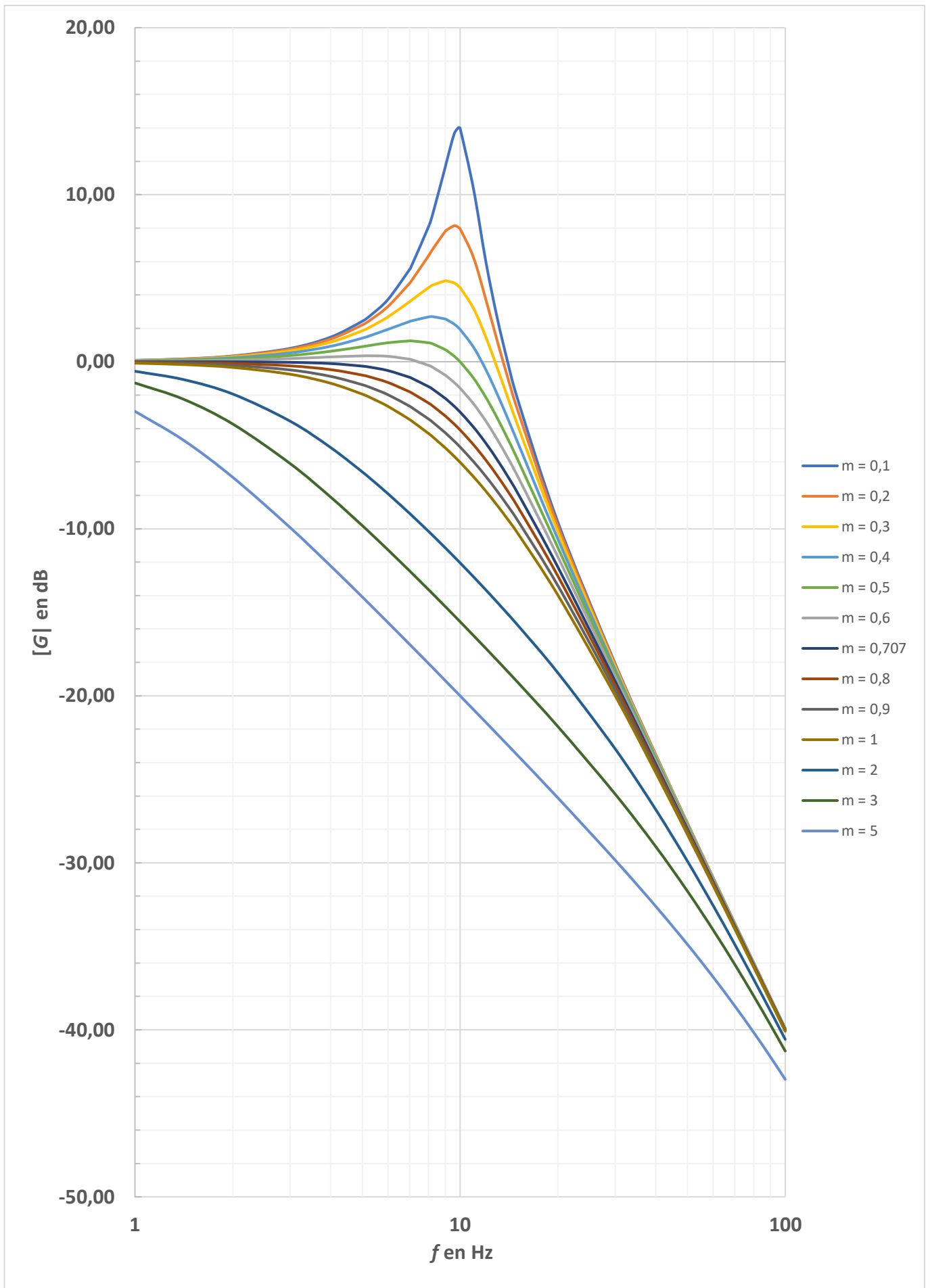
7. Graphe du module du gain en tension à partir de l'expression (4)

$$L = 2,533 \text{ H} \quad C = 100 \text{ } \mu\text{F} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62,83222 \text{ rad/s} \text{ soit } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10 \text{ Hz}$$

$$m = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Exemple purement théorique avec des composants parfaits !

Voir page suivante.



Les trois régimes

a) $m < 1$: régime dit **oscillant**

1^{er} cas : $0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$: résonance

Il s'agit des six premières courbes en partant du haut. Elles présentent toutes un maximum.

$R (\Omega)$	31,83	63,66	95,49	127,32	159,15	190,98
Q	5,00	2,50	1,67	1,25	1,00	0,83
m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
gain max (dB)	14,02	8,14	4,85	2,70	1,25	0,35
f à gain max (Hz)	9,90	9,59	9,06	8,25	7,07	5,29
gain à f_0 (dB)	13,98	7,96	4,44	1,94	0,00	-1,58

Quand R diminue, nous vérifions bien que :

- le facteur de qualité Q augmente et le coefficient d'amortissement m diminue,
- la valeur maximale du module du gain en tension augmente : c'est la surtension due à la résonance,
- cette résonance se produit à une fréquence différente de la fréquence de résonance f_0 du circuit LC,
- cette fréquence s'en rapproche quand Q a une valeur supérieure ou égale à 5.

2^e cas : $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Il s'agit de la septième courbe en partant du haut.

$R (\Omega)$	225,08
Q	0,71
m	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
gain à f_0 (dB)	-3,01

En réalité, il n'y a plus de surtension et le module du gain en tension est égal à -3 dB à f_0 . C'est la courbe la plus plate possible.

3^e cas : $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$

Il s'agit des huitième et neuvième courbes en partant du haut.

$R (\Omega)$	254,65	286,48
Q	0,63	0,56
m	0,8	0,9
gain à f_0 (dB)	-4,08	-5,11

Ici aussi, il n'y a plus de surtension.

b) $m = 1$: *régime dit critique*

Il s'agit de la quatrième courbe en partant du bas.

$R (\Omega)$	318,31
Q	0,5
m	1
gain à f_0 (dB)	-6,02

Le module du gain en tension est égal à -6 dB à f_0 .

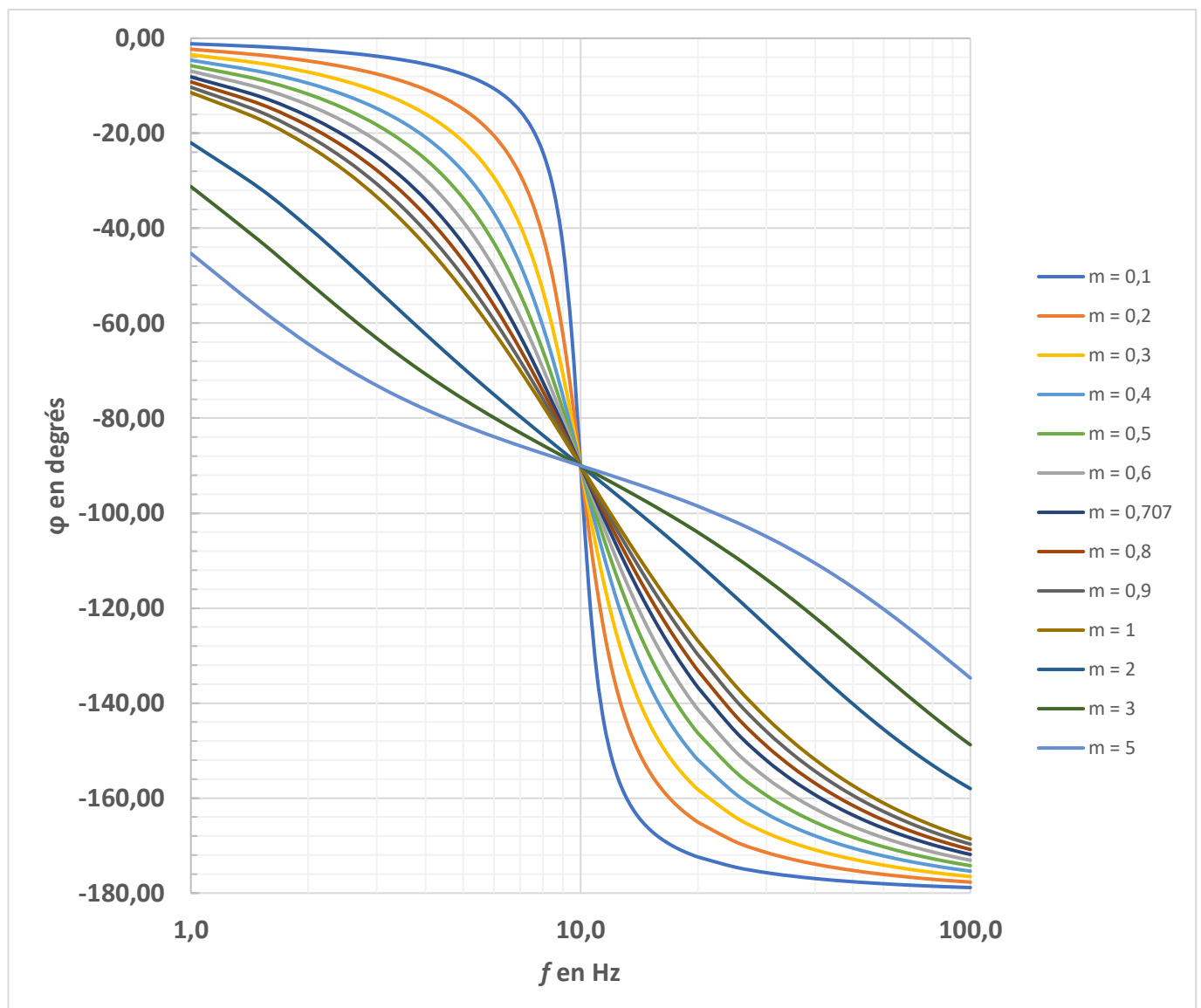
c) $m > 1$: *régime dit apériodique*

Il s'agit des trois courbes du bas.

Voir page suivante.

R (Ω)	636,82	954,92	1591,54
Q	0,25	0,17	0,10
m	2	3	5
f_1 (Hz)	2,68	1,72	1,01
gain à f_1 (dB)	-3,03	-3,01	-3,01
f_2 (Hz)	37,32	58,28	98,99
gain à f_2 (dB)	-25,91	-33,64	-42,83
gain à f_0 (dB)	-12,04	-15,56	-20,00

8. Graphe de la phase du gain en tension à partir de l'expression (6)



9. Tension de sortie $y(t)$

Tension d'entrée : $x(t) = E \sin(\omega t)$

Tension de sortie : $y(t) = |G(\omega)| E \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} E \sin\left(\omega t - \arctan \frac{-2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) \quad (7)$$

$$\text{- si } \omega < \omega_0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi(\omega) < 0$$

$$\text{- si } \omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \omega = \omega_0 : \text{ pulsation de résonance}$$

$$\text{- si } \omega > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad -\pi < \varphi(\omega) < -\frac{\pi}{2}$$

10. $y(t)$: en avance ou en retard de phase par rapport à $x(t)$?

Prenons un exemple : $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ pour une certaine valeur de ω .

Soit l'instant t_1 où $x(t)$ arrive à son énième maximum.

T est la période du signal sinusoïdal appliqué en entrée.

$$\text{Nous avons alors } \omega t_1 = n \frac{\pi}{2} \text{ et } t_1 = n \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega} = n \frac{\pi}{2} \frac{T}{2\pi} = n \frac{T}{4} = n \frac{2T}{8}$$

Ce qui correspond à l'instant t_2 pour $y(t)$ avec :

$$\omega t_2 - \frac{\pi}{4} = n \frac{\pi}{2} \text{ et } t_2 = n \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{\omega} = n \frac{\pi}{2} \frac{T}{2\pi} + \frac{\pi}{4} \frac{T}{2\pi} = n \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = n \frac{2T}{8} + \frac{T}{8}$$

Par conséquent $t_2 > t_1$, la tension de sortie $y(t)$ est donc en retard par rapport à la tension d'entrée $x(t)$.

11. Graphe de $y(t)$

Signal sinusoïdal en entrée : $x(t) = E \sin(\omega t)$.

Signal sinusoïdal en sortie : $y(t) = |G(\omega)| E \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$.

Pour notre exemple, choisissons $E = 1$ V, soit $x(t) = \sin(\omega t)$.

$$\text{Et choisissons } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 62,83222 \text{ rad/s soit } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10 \text{ Hz.}$$

$$|G(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{2m}$$

$$\varphi(\omega_0) = \text{atan2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}; -2m \frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = \text{atan2}(0; -2m) = -1,570796... \text{ rad} = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

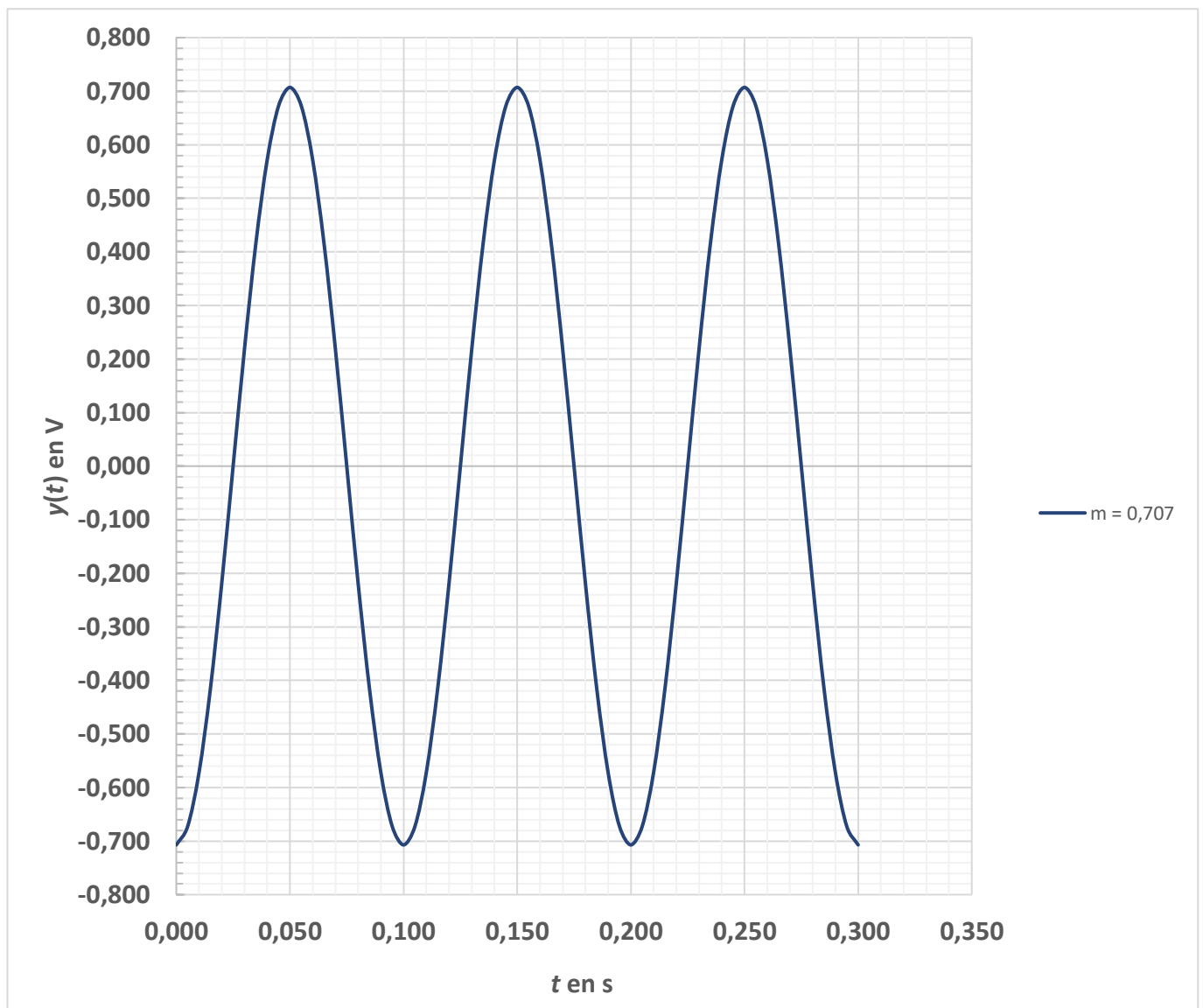
Choisissons $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où :

$$|G(\omega_0)| = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0,707$$

Signal sinusoïdal en sortie : $y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega_0 t)$

$$y(t) \sim 0,707 \cos(\omega_0 t)$$

Ce que montre parfaitement le graphe suivant :



12. Que se passe-t-il à $t = 0$?

Tension d'entrée : $x(0) = \sin(0) = 0$ V.

Tension de sortie : $y(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sim -0,707$ V, ce qui se voit sur le graphe précédent.

Pourtant « Rien à l'entrée donc rien à la sortie ! »...

La tension de sortie devrait également être nulle.

Ou alors le condensateur C devait être chargé au moment du démarrage.

Mais on ne l'a supposé nulle part dans l'établissement des expressions !

La réponse à cet étonnant phénomène sera donnée à la section C...