

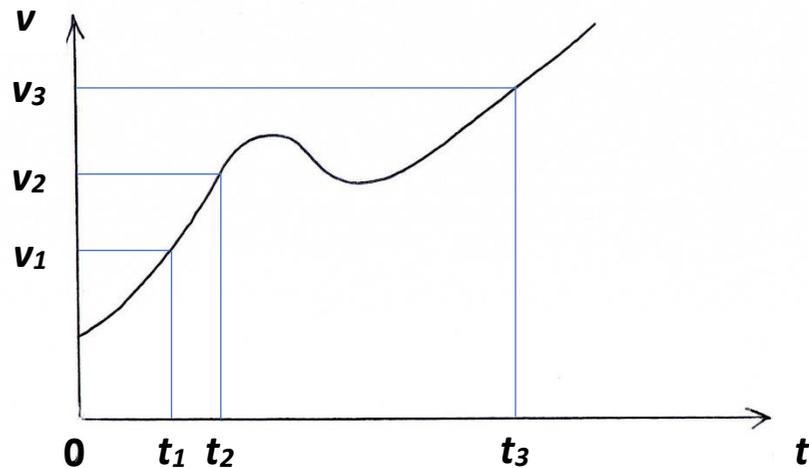
La radio numérique et logicielle

F5FOD/v02 26 mai 2025

Initiation !

Partie 1 : Numérique et IQ

1. Signal représenté en analogique



Grappe d'une tension v en fonction du temps t .

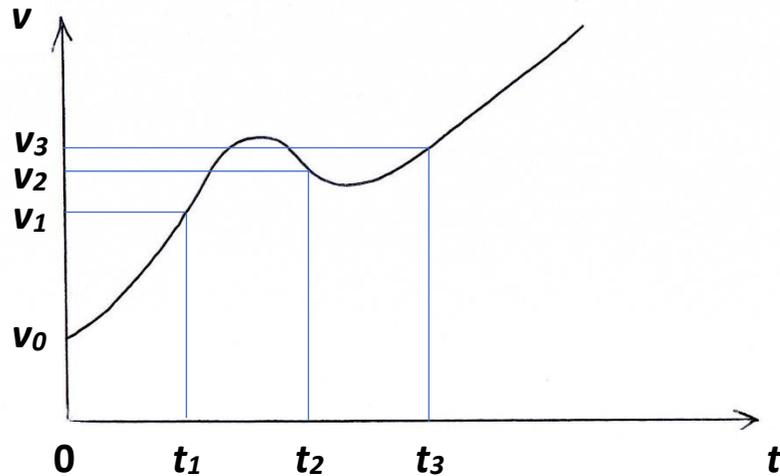
À tout instant, sur ce graphe, on peut relever la valeur de cette tension.

On pourrait donc obtenir une infinité de valeurs de v !

Par exemple :

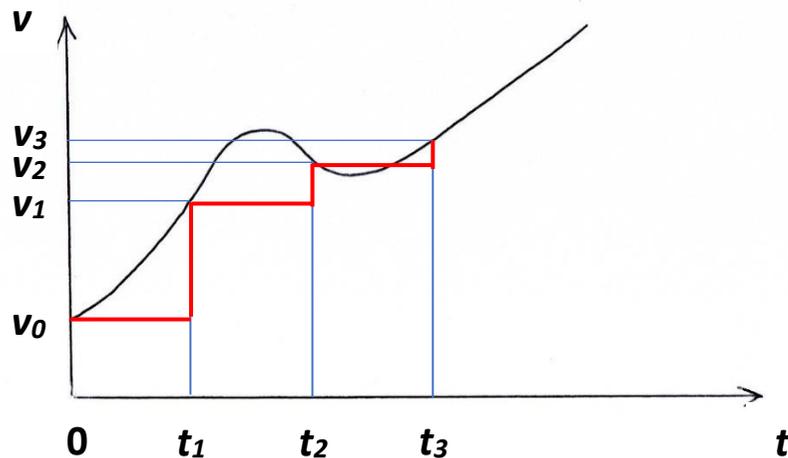
- au temps t_1 , la tension vaut v_1 ,
- au temps t_2 , la tension vaut v_2 ,
- au temps t_3 , la tension vaut v_3 ,
- etc., quelle que soit la valeur du temps t .

2. Échantillonnons !



Ici, au contraire, on ne relève la valeur de la tension v qu'à intervalles de durée identique.

On ne relève donc que des échantillons de cette tension v .
C'est « l'échantillonnage ».



Dans notre exemple, on a quatre échantillons de tension :

v_0, v_1, v_2 et v_3 .

Autrement dit, si l'on n'a que ces quatre échantillons, c'est comme si la courbe d'origine (en noir) avait été remplacée par la courbe en **rouge** entre $t = 0$ et $t = t_3$!

Si l'on veut être « plus près » du signal d'origine, il faut diminuer le temps entre deux échantillons successifs.

Cette durée est appelée « période d'échantillonnage ». Notons-la $T_{éch}$; $F_{éch} = 1/T_{éch}$ est alors la « fréquence d'échantillonnage ».

Si $T_{éch}$ tend vers 0, on retrouve notre signal d'origine ! Mais $F_{éch}$ tend alors vers l'infini...

Sans arriver jusque là, plus $F_{éch}$ est élevée, plus la représentation par échantillons est fidèle à l'original.

Mais on verra un peu plus tard qu'il ne sera pas nécessaire d'augmenter démesurément cette fréquence pour obtenir de bons résultats (*théorème de Shannon*).

Laissons notre signal pour l'instant et retombons en enfance :
apprenons... à compter !



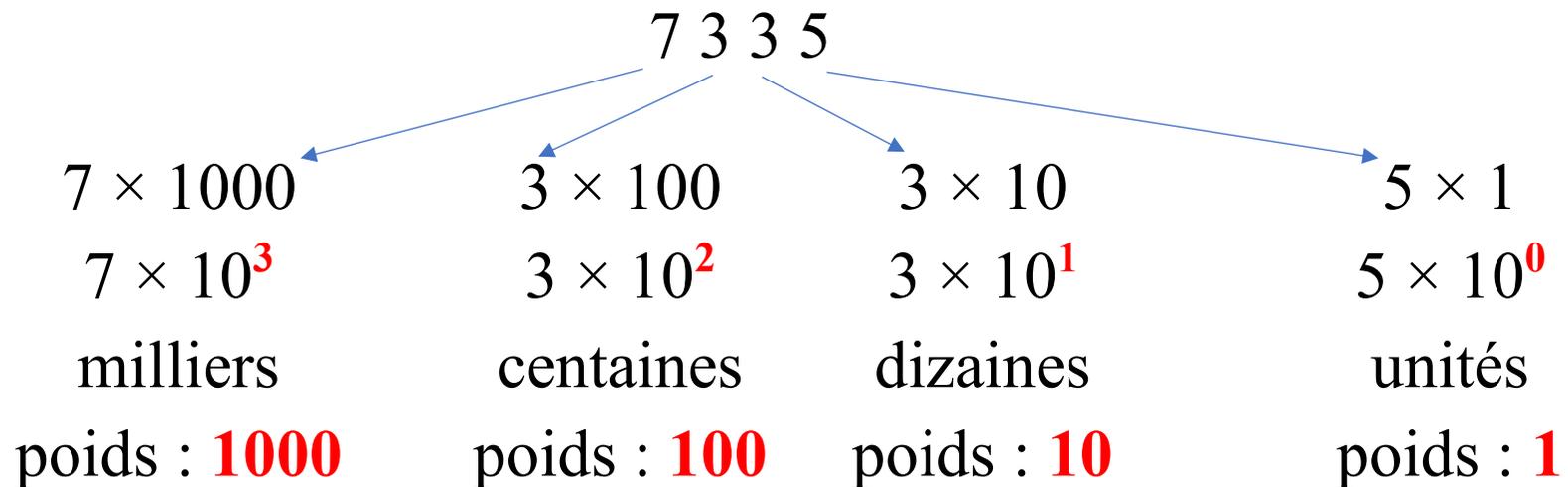
3. La numération décimale

Nous utilisons dix « chiffres » pour fabriquer des « nombres » :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

De plus, la « position » du chiffre dans le nombre a sa propre signification.

Ainsi, dans le nombre 7335, le premier « 3 » n'a pas le même « poids » que le second « 3 ».



$$7335 = (7 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$$

C'est le système « base 10 » ou « décimal » car :

- on utilise 10 chiffres différents pour fabriquer un nombre,
- c'est le nombre 10 que l'on élève à des puissances successives.

Le chiffre le plus à droite est le chiffre « le moins significatif ».

Le chiffre le plus à gauche est le chiffre « le plus significatif ».

Remarque

Les chiffres peuvent avoir n'importe quelle graphie.



On peut même utiliser dix lettres de n'importe quel alphabet ou dix petits dessins ou noms différents :

« chat »	= 0	« vache »	= 4	« cheval »	= 8
« chien »	= 1	« mouton »	= 5	« taureau »	= 9
« lapin »	= 2	« poule »	= 6		
« cochon »	= 3	« chèvre »	= 7		

Le nombre 7335 s'écrit ou se dessine alors :

« chèvre » « cochon » « cochon » « mouton ».

Apprenons/chantons ensemble :

Chien et chien lapin (un et un deux)

Lapin et chien cochon (deux et un trois)

Lapin fois cochon poule (deux fois trois six)

Euh, revenons...à nos moutons !

4. La numération binaire

C'est le système « base 2 » ou « binaire » car :

- on utilise 2 chiffres différents 0 et 1 pour fabriquer un nombre,
- c'est le nombre 2 que l'on élève à des puissances successives.

Ici aussi, la « position » du chiffre dans le nombre a sa propre signification.

Ainsi, dans le nombre 1110010100111, chaque « 0 » et chaque « 1 » a son propre poids.

Pour le convertir en décimal, on calcule (de gauche à droite, par exemple) les puissances successives de 2 (et non plus de 10 car on est en base 2) :

$$(1 \times 2^{12}) + (1 \times 2^{11}) + (1 \times 2^{10}) + (0 \times 2^9) + (0 \times 2^8) + (1 \times 2^7) + (0 \times 2^6) \\ + (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

Comptons

en base 10

en base 2

toujours en base 2

0	0	0000
1	1	0001
2	10	0010
3	11	0011
4	100	0100
5	101	0101
6	110	0110
7	111	0111
8	1000	1000
9	1001	1001
10	1010	1010
11	1011	1011
12	1100	1100
13	1101	1101
14	1110	1110
15	1111	1111

Pourquoi utiliser le système binaire en électronique ?

Parce qu'il est facile d'exprimer électriquement un « 0 » ou un « 1 ».

On peut leur assigner deux niveaux de tension différents.

Par exemple : 0 volt pour un « 0 » et 5 volts pour un « 1 ».

Prenons le nombre 13, en décimal. Soit 1101 en binaire.

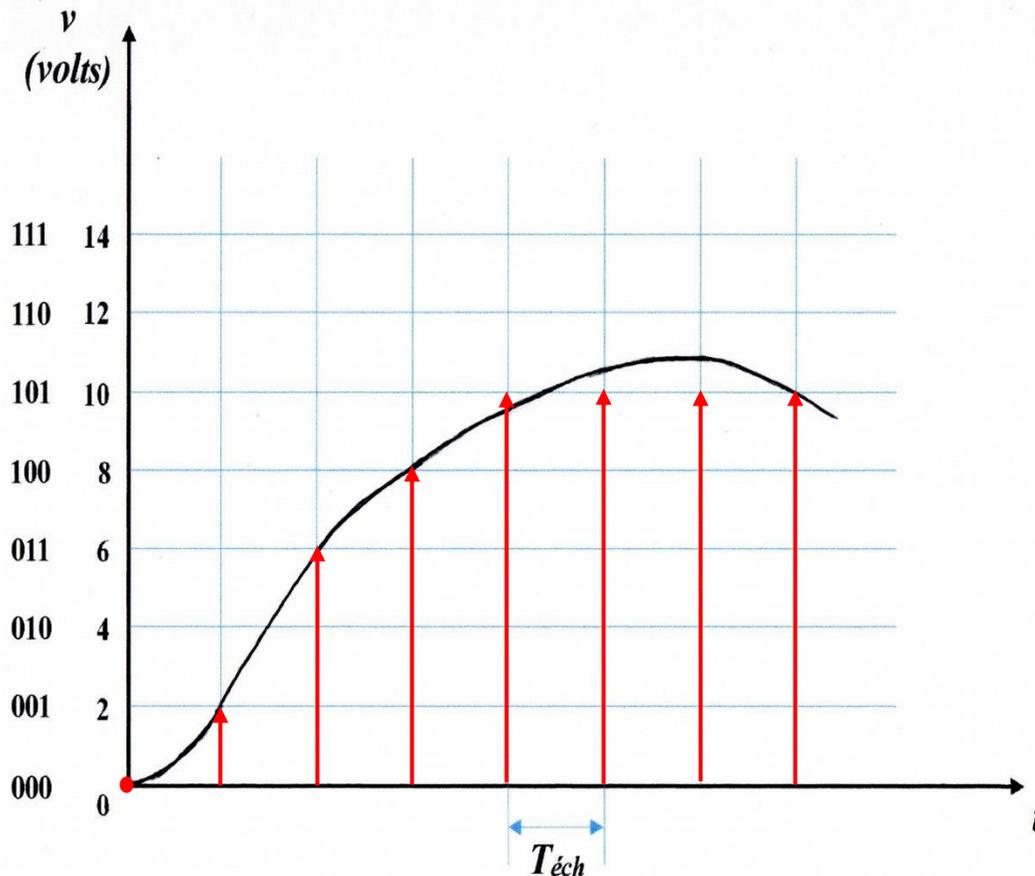
Sur 4 fils :

LSB	fil n° 0	_____	5 V	1
	fil n° 1	_____	0 V	0
	fil n° 2	_____	5 V	1
MSB	fil n° 3	_____	5 V	1

L'ensemble de ces quatre fils porte la valeur 1101 en binaire, soit la valeur 13 en décimal.

Et on sait faire des additions, coder des caractères, afficher, stocker,...

5. Conversion Analogique vers Numérique



Ici, un CAN, convertisseur analogique-numérique, à 3 bits convertit la tension v en « mots » numériques : 000, 001, 011, 100, 101, 101, 101, 101.

La période d'échantillonnage est égale à $T_{éch}$.

La résolution est faible : 2 volts ici car on n'a que 3 bits.
Il n'y a que 7 intervalles de tension possibles.

Il faut réduire la valeur de l'intervalle de tension donc augmenter le nombre de bits du CAN.

Il faut réduire aussi la période d'échantillonnage donc augmenter la fréquence d'échantillonnage !

Soit N le nombre de bits du CAN. Le nombre de valeurs différentes possibles est égal à 2^N .

La dynamique en dB est donc égale à :

$$20 \times \log 2^N = 20 \times N \times \log 2 = 20 \times N \times 0,3 = 6 \times N$$

soit 6 dB/bit.

N , nombre de bits	3	8	10	12	14
Nombre de valeurs \neq	8	256	1024	4096	16384
Dynamique (dB)	18	48	60	72	84

Et le nombre d'intervalles est égal à : $2^N - 1$.

N , nombre de bits	3	8	10	12	14
Nombre d'intervalles	7	255	1023	4095	16383

Résolution arrondie
dans notre exemple
(car 14 V maxi),

en mV	2000	54,90	13,69	3,42	0,85
Facteur d'amélioration			4	4	4

Mbit/s

Féch = 1,048576 MHz	3	8	10	12	14
Féch = 5,242880 MHz	15	40	50	60	70

Le nombre de bits par seconde, lui, est proportionnel au nombre de bits du CAN et à la fréquence d'échantillonnage !

1 Mbit = 1024×1024 bits = 1 048 576 bits.

1 octet = 1 byte = 8 bits.

Il y a de nombreuses façons de concevoir un CAN ou son « inverse », un CNA. Voir par exemple :

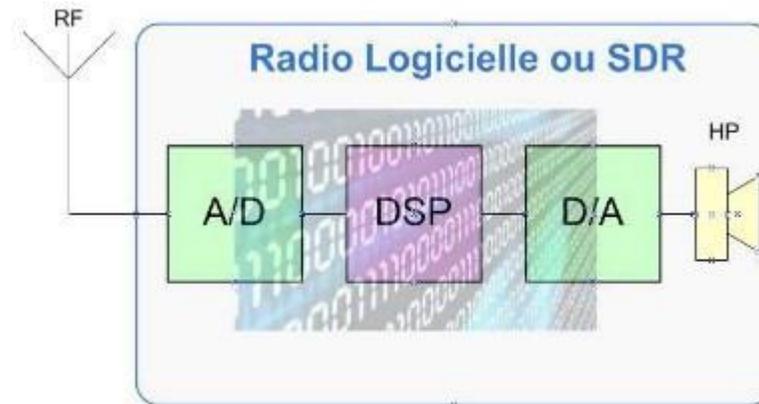
https://www.emse.fr/~dutertre/documents/cours_convertisseurs.pdf

6. Un récepteur numérique

https://www.r-e-f.org/images/Documents/AG/2014/SDR_Presentation.pdf

(Christian Barthod, F8GHE)

Voilà, c'est très simple :



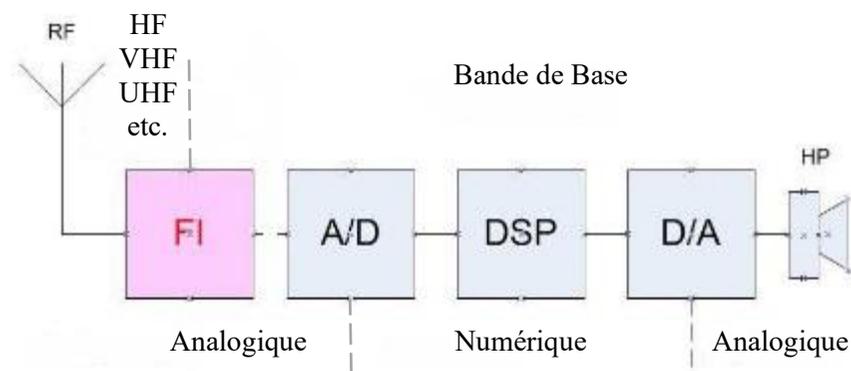
DSP : Digital Signal Processor

Mais... le théorème de Shannon nous dit que la fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale à deux fois la fréquence maximale à traiter.

Quand on monte en fréquence, le CAN alors devient très coûteux.

De plus, les calculs doivent être effectués en temps réel par le DSP, ce qui nécessite un matériel également très coûteux et gros consommateur d'énergie.

À ce type d'architecture appelée « Conversion directe du signal HF », au niveau amateur on préfère la « Conversion indirecte » :



On convertit la « HF » en bande de base *indirectement* en passant par une FI (Fréquence Intermédiaire) et la fabrication de signaux « IQ » avant le CAN.

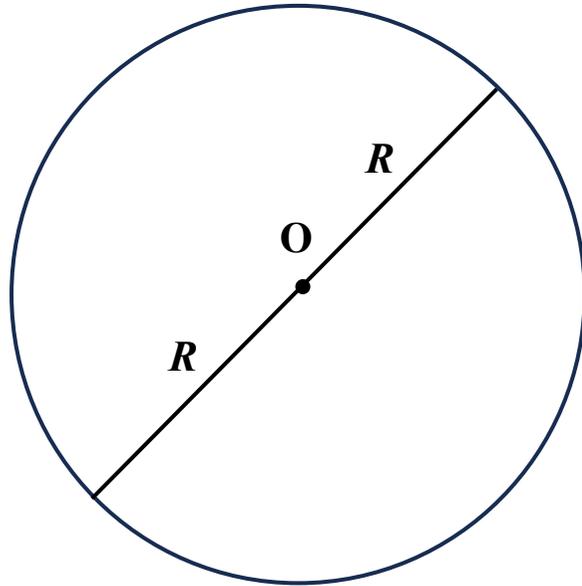
Bande de base : c'est le signal utile dans sa forme originale (on dit aussi que la fréquence de la porteuse est alors égale à... 0 Hz !).

Ce n'est pas la solution idéale (à cause de la FI) mais elle est bon marché et simple pour l'expérimentation.

Mais qu'est-ce que le « IQ » ?

7. Un peu de trigonométrie...

7.1 Angles, radians et degrés



C : Circonférence du cercle, mesurée avec une corde par exemple.

D : Diamètre du cercle.

Quelle que soit la valeur de D , on a :

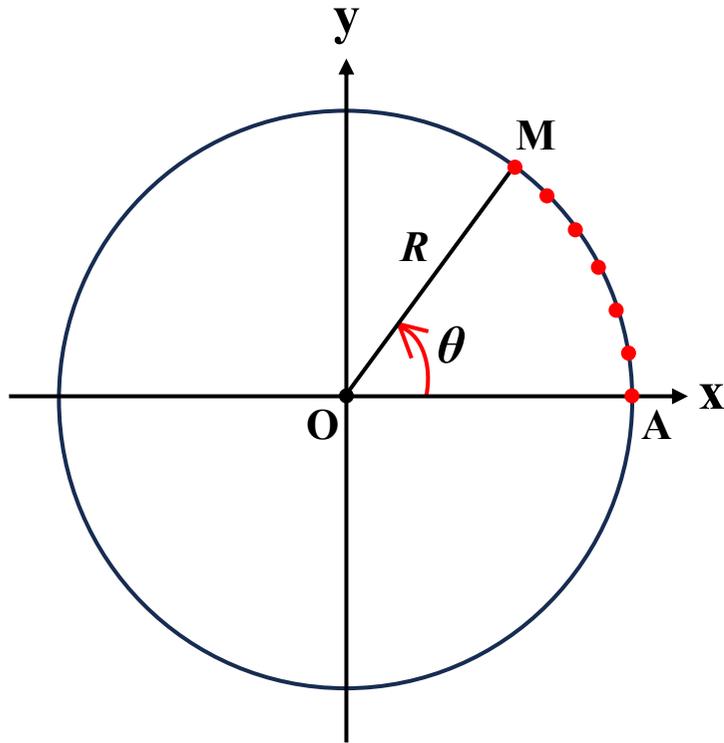
$$\frac{C}{D} = \text{valeur constante} = 3,14\dots = \pi$$

R : rayon du cercle, $R = D/2$.

La relation devient :

$$\frac{C}{D} = \frac{C}{2R} = \pi \quad \text{soit} \quad C = 2\pi R = (2\pi)R$$

On voit donc apparaître la valeur « 2π » dans la formule donnant la circonférence.



Maintenant, intéressons-nous à une portion de cette circonférence : un « arc », l'arc AM.

Cet arc est « sous-tendu » par « l'angle au centre » θ .

On va admettre la relation suivante :

$$AM = \theta \times R$$

Maintenant, ramenons M en A et faisons tourner le segment OM autour de l'axe O , dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

À un moment donné, M va se retrouver à nouveau en A . Il aura parcouru un tour complet sur le cercle.

L'arc parcouru par M depuis A ... jusqu'à y revenir est donc la totalité du cercle : la longueur de cet arc n'est autre que la circonférence C du cercle.

Comme $C = (2\pi)R$, l'angle θ est alors égal à 2π .

Autrement dit, un tour complet correspond à un angle égal à 2π .

Un quart de tour $= 2\pi/4 = \pi/2 =$ un angle droit.

Un demi-tour $= 2\pi/2 = \pi =$ un angle plat.

Trois quarts de tour $= 2\pi \times (3/4) = 3\pi/2$.

Un tour $= 2\pi$.

Ces valeurs d'angle sont des valeurs exprimées en **radians**.

Abréviation : « **rad** », selon *Le Système international d'unités, SI* 9^e édition, 2019, V3.01 Août 2024, Bureau International des Poids et Mesures, page 26 dont la note *b* :

Tableau 4. Les 22 unités SI ayant un nom spécial et un symbole particulier

Grandeur dérivée	Nom spécial de l'unité	Symbole	Expression de l'unité en unités de base ^(a)	Expression de l'unité en d'autres unités SI
angle plan	radian ^(b)	rad	^(b)	1

(b) Le radian est l'unité cohérente d'angle plan. Un radian est un angle compris entre deux rayons d'un cercle qui, sur la circonférence du cercle, interceptent un arc de longueur égale à celle du rayon. Cela suggère que $\text{rad} = \text{m}/\text{m}$ mais cette représentation n'est pas intrinsèque et pourrait porter à confusion car l'angle n'est pas une grandeur de même nature que d'autres rapports de longueurs. Une autre définition possible serait que l'angle droit est égal à $\pi/2$ rad. Le radian est aussi l'unité cohérente d'angle de phase. Pour les phénomènes périodiques, l'angle de phase augmente de 2π rad à chaque période.

Le Bureau International des Poids et Mesures <https://www.bipm.org/fr/> est un organisme qui a toute autorité au niveau mondial dans le domaine.

Attention cependant, le radian est une « unité dérivée sans dimension ». En effet :

$$\theta = \frac{AM}{R}$$

Donc les radians étant des mètres divisés par des mètres, ce sont des... « riens » !

On utilise aussi le degré ($^{\circ}$) : 360° pour 2π radians.

Le nombre 360 est très pratique car il a 24 diviseurs :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 et 360 !

Valeurs remarquables :

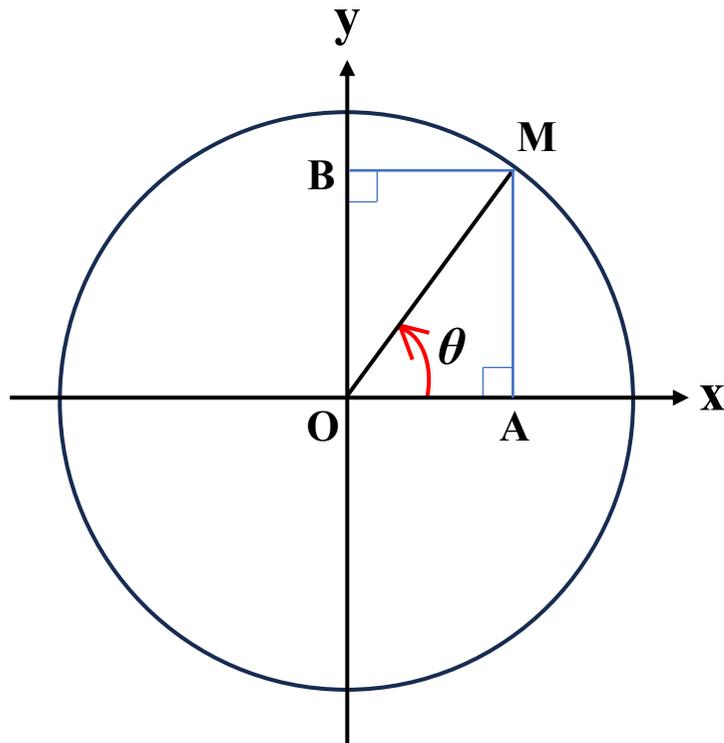
0° => 0 radian	180° => π radians
30° => $\pi/6$ radian	270° => $3\pi/2$ radians
45° => $\pi/4$ radian	360° => 2π radians
60° => $\pi/3$ radian	
90° => $\pi/2$ radian	

En français, on considère que le pluriel commence à 2. Tout ce qui est inférieur à 2 reste au singulier.

Donc 90° => $\pi/2$ radian, sans « s ».

7.2 Sinus, cosinus, tangente

Pour expliquer le concept « IQ », il faut faire un minimum de trigo !
Désolé...



OAM est un triangle rectangle en A.
OM est son hypoténuse : c'est le côté « opposé » à l'angle droit.

AM est le côté « opposé » à θ .
OA est le côté « adjacent » à θ .

$$\cos(\theta) = \frac{OA}{OM} \quad \sin(\theta) = \frac{AM}{OM} = \frac{OB}{OM}$$

$$\tan(\theta) = \frac{AM}{OA} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Prenons OM comme unité de longueur : $OM = 1$.

Alors :

$$\cos(\theta) = OA$$

$$\sin(\theta) = OB$$

Par conséquent :

- l'axe des x est l'axe des cosinus,
- l'axe des y est l'axe des sinus.

Il existe de très nombreuses formules en trigonométrie.
Nous n'en utiliserons que deux (sans les démontrer ici) :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad (1)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \quad (2)$$

a et b sont tout simplement deux angles quelconques.

8. Signal sinusoïdal, rappels

<https://www.f5kee.fr/formation-a-l-examen-signal-periodique-signal-sinusoidal/>

<https://www.f5kee.fr/formation-a-l-examen-omega/>

Un signal sinusoïdal $s(t)$ varie... sinusoïdalement (!) en fonction du temps t .

Il s'écrit de la façon suivante :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

A : amplitude maximale, en volts ou en ampères principalement.

ω : pulsation (ou vitesse angulaire), en radians par seconde.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f : fréquence, en hertz ; T : période, en secondes.

t : temps, en secondes.

φ : phase à l'origine (quand $t = 0$), en radians.

Valeurs remarquables de ωt :

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Exercice

- tracer $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ sur un même repère,
- constater les valeurs max. et min.
- constater le déphasage.

9. Un signal $s(t)$ modulé en phase (par exemple en G3E)

$$s(t) = A_p \cos \left[\omega_p t + \varphi(t) \right]$$

A_p : amplitude maximale de la porteuse.

ω_p : pulsation de la porteuse = $2\pi f_p$, f_p étant la fréquence de la porteuse.

Cette fois-ci, la phase $\varphi(t)$ varie en fonction du temps.

C'est **le signal utile** modulant la porteuse... en phase.

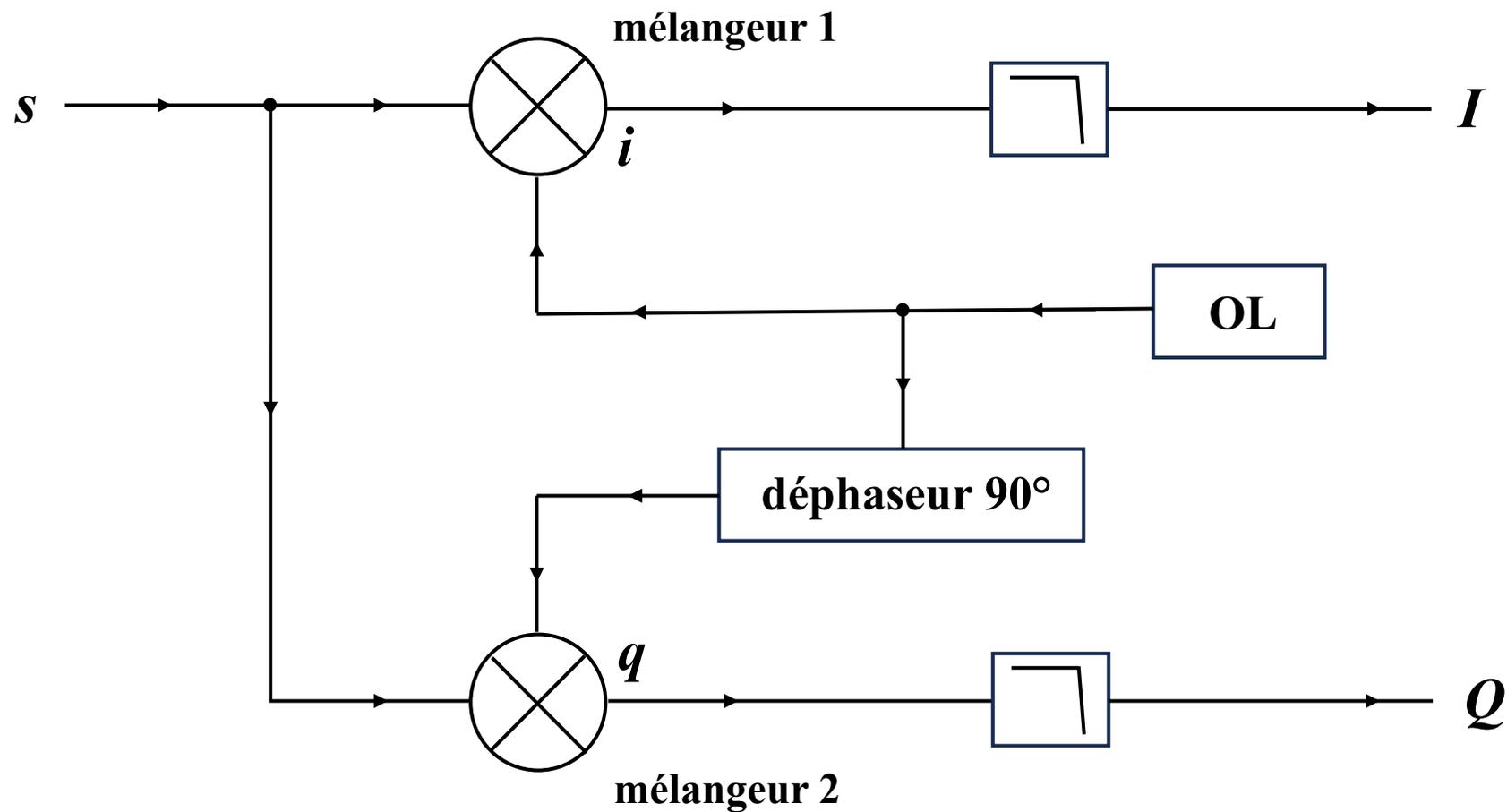
Par exemple, des paroles, de la musique, etc.

Pour simplifier l'écriture, notons s pour $s(t)$.

10. Et voilà IQ !

10.1 Schéma de base

Attention : ce n'est qu'un exemple ! Il y a de très nombreuses structures différentes...



Le signal s est appliqué à deux mélangeurs :

- mélangeur 1,
- mélangeur 2.

OL est un Oscillateur Local.

Choisissons sa pulsation égale à celle du signal s , soit ω_p .

C'est-à-dire qu'OL oscille sur la fréquence de s .

Donc :

$$OL = a \cos(\omega_p t)$$

Pour simplifier, mettons son amplitude maximale égale à 1 :

$$OL = \cos(\omega_p t)$$

10.2 Le mélangeur 1

Le mélangeur 1 effectue le produit i des signaux présents à ses deux entrées :

$$i = s \times OL = A_p \cos \left[\omega_p t + \varphi(t) \right] \times \cos \left(\omega_p t \right)$$

Comme

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \left[\cos(a+b) + \cos(a-b) \right] \quad (1)$$

avec ici

$$a = \omega_p t + \varphi(t)$$

$$b = \omega_p t$$

on obtient :

$$i = \frac{A_p}{2} \left[\cos \left(\omega_p t + \varphi(t) + \omega_p t \right) + \cos \left(\omega_p t + \varphi(t) - \omega_p t \right) \right] = \frac{A_p}{2} \left[\cos \left(2\omega_p t + \varphi(t) \right) + \cos \left(\varphi(t) \right) \right]$$

Un filtre passe-bas éliminera la composante à la pulsation élevée $2\omega_p$ (donc à fréquence $2f_p$, deux fois la fréquence de la porteuse) et il restera tout simplement :

$$I = \frac{A_p}{2} \cos(\varphi(t))$$

10.3 Le mélangeur 2

Commençons par déphaser le signal OL de 90° soit $\pi/2$ radians : nous obtenons un signal $OL_quadrature$:

$$OL_quadrature = \cos\left(\omega_p t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_p t)$$

Le mélangeur 2 effectue le produit q des signaux présents à ses deux entrées :

$$q = s \times OL_quadrature = A_p \cos[\omega_p t + \varphi(t)] \times [-\sin(\omega_p t)] = -A_p \sin(\omega_p t) \times \cos(\omega_p t + \varphi(t))$$

Comme

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \quad (2)$$

avec ici

$$a = \omega_p t \quad b = \omega_p t + \varphi(t)$$

on obtient :

$$q = -\frac{A_p}{2} \left[\sin(\omega_p t + \omega_p t + \varphi(t)) + \sin(\omega_p t - \omega_p t - \varphi(t)) \right] = -\frac{A_p}{2} \left[\sin(2\omega_p t + \varphi(t)) + \sin(-\varphi(t)) \right]$$

Ou encore :

$$q = \frac{A_p}{2} \left[-\sin(2\omega_p t + \varphi(t)) - \sin(-\varphi(t)) \right]$$

Or

$$\sin(-\varphi(t)) = -\sin(\varphi(t))$$

On obtient finalement :

$$q = \frac{A_p}{2} \left[-\sin(2\omega_p t + \varphi(t)) + \sin(\varphi(t)) \right]$$

Un même second filtre passe-bas éliminera la composante à la pulsation élevée $2\omega_p$ (donc à fréquence $2f_p$) et il restera tout simplement :

$$Q = \frac{A_p}{2} \sin(\varphi(t))$$

10.4 En résumé

On arrive donc à ce résultat extraordinairement simple :

$$I = \frac{A_p}{2} \cos(\varphi(t))$$

$$Q = \frac{A_p}{2} \sin(\varphi(t))$$

I est un cosinus,

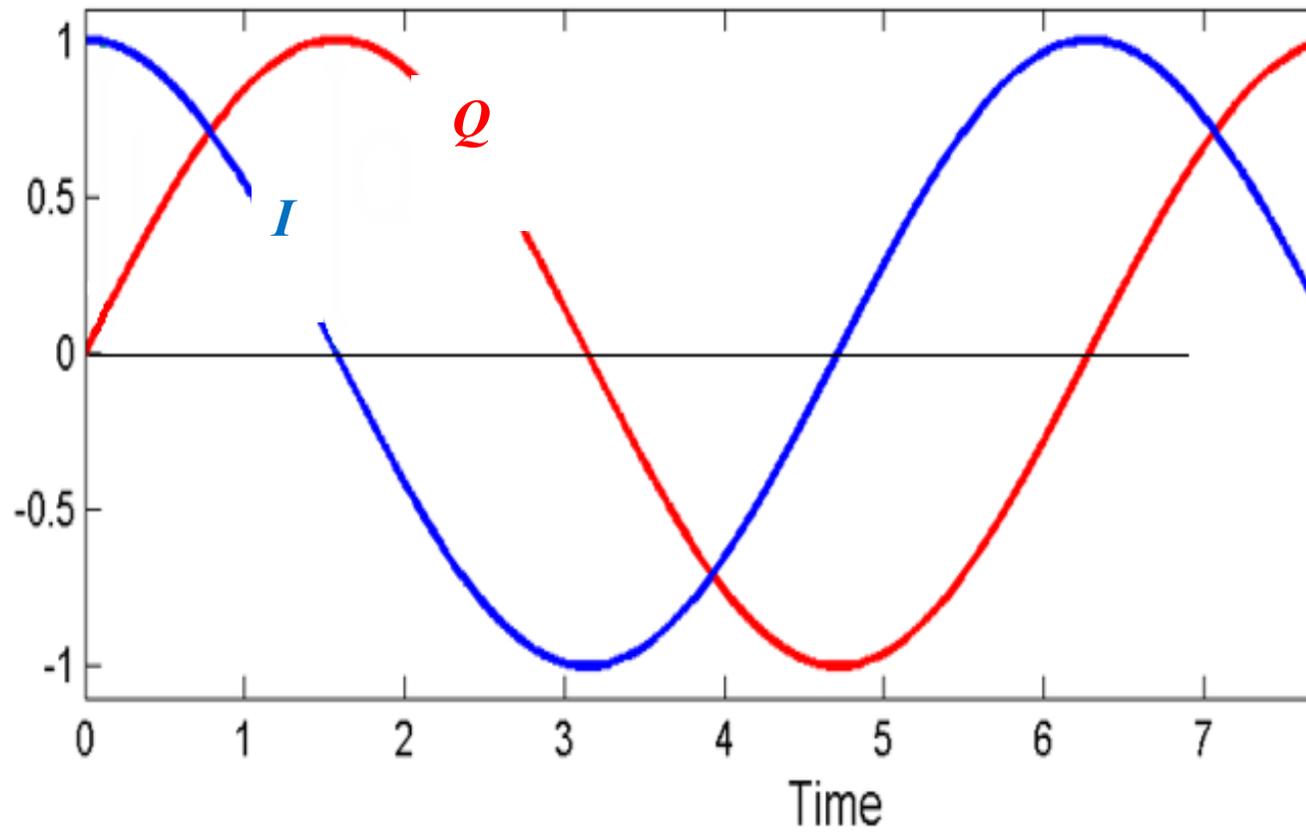
Q est un sinus.

Cosinus et sinus sont en quadrature.

D'où les appellations :

$I = \text{signal « In-phase »},$
 $Q = \text{signal « Quadrature »}.$

$\varphi(t)$ est le signal modulant la porteuse, donc le signal qui nous intéresse !



10.5 Et alors ?

Divisons Q par I :

$$\frac{Q}{I} = \frac{\frac{A_p}{2} \sin(\varphi(t))}{\frac{A_p}{2} \cos(\varphi(t))} = \frac{\sin(\varphi(t))}{\cos(\varphi(t))} = \tan(\varphi(t))$$

Et par conséquent :

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{Q}{I}\right)$$

On a « récupéré » notre signal utile !

On sait très facilement effectuer ce calcul de φ avec une calculatrice, un tableur (fonction « atan » ou « atan2 » dans Excel)... ou un programme informatique !

On peut également facilement « récupérer » A_p :

$$I^2 = \frac{A_p^2}{4} \cos^2(\varphi(t)) \quad Q^2 = \frac{A_p^2}{4} \sin^2(\varphi(t))$$

On les additionne, en remarquant que (théorème de Pythagore) :

$$\cos^2(\varphi(t)) + \sin^2(\varphi(t)) = 1$$

$$I^2 + Q^2 = \frac{A_p^2}{4} [\cos^2(\varphi(t)) + \sin^2(\varphi(t))] = \frac{A_p^2}{4}$$

On peut alors extraire A_p :

$$A_p^2 = 4(I^2 + Q^2)$$

$$A_p = 2\sqrt{I^2 + Q^2}$$

10.6 Pour les autres types de modulation

Seule change l'équation de départ du signal s .

Nous allons en donner quelques exemples.

10.6.1 Modulation d'amplitude en bande latérale unique, par exemple J3E USB/BLS

<https://www.f5kee.fr/formation-a-l-examen-modulation-en-bande-laterale-unique/>

$$s = \frac{mA_p}{2} \cos(\omega_p t + \omega_u t)$$

le signal utile modulant étant :

$$m \cos(\omega_u t)$$

Dans les calculs « modulation de phase », il suffit de remplacer :

A_p par $mA_p/2$

$\varphi(t)$ par $\omega_u t$

Et on obtient :

$$I = \frac{mA_p}{4} \cos(\omega_u t)$$

$$Q = \frac{mA_p}{4} \sin(\omega_u t)$$

$$\omega_u t = \arctan \frac{Q}{I}$$

$$\frac{mA_p}{2} = 2\sqrt{I^2 + Q^2}$$

10.6.2 Modulation d'amplitude en bande latérale unique, par exemple J3E LSB/BLI

<https://www.f5kee.fr/formation-a-l-examen-modulation-en-bande-laterale-unique/>

$$s = \frac{mA_p}{2} \cos(\omega_p t - \omega_u t)$$

le signal utile modulant étant toujours :

$$m \cos(\omega_u t)$$

Dans les calculs « modulation de phase », il suffit de remplacer :

$$A_p \text{ par } mA_p/2$$

$$\varphi(t) \text{ par } -\omega_u t$$

Et on obtient :

$$I = \frac{mA_p}{4} \cos(-\omega_u t)$$

$$Q = \frac{mA_p}{4} \sin(-\omega_u t)$$

$$-\omega_u t = \arctan \frac{Q}{I}$$

$$\frac{mA_p}{2} = 2\sqrt{I^2 + Q^2}$$

10.6.3 Modulation d'amplitude, par exemple A3A

<https://www.f5kee.fr/formation-a-l-examen-modulation-d-amplitude-principe-du-modulateur/>

$$s = A_p \left[1 + m \cos(\omega_u t) \right] \cos(\omega_p t)$$

le signal utile modulant étant toujours :

$$m \cos(\omega_u t)$$

Les calculs sont similaires aux précédents.

Il faut simplement utiliser deux formules trigonométriques supplémentaires :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad \sin(a) \cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2}$$

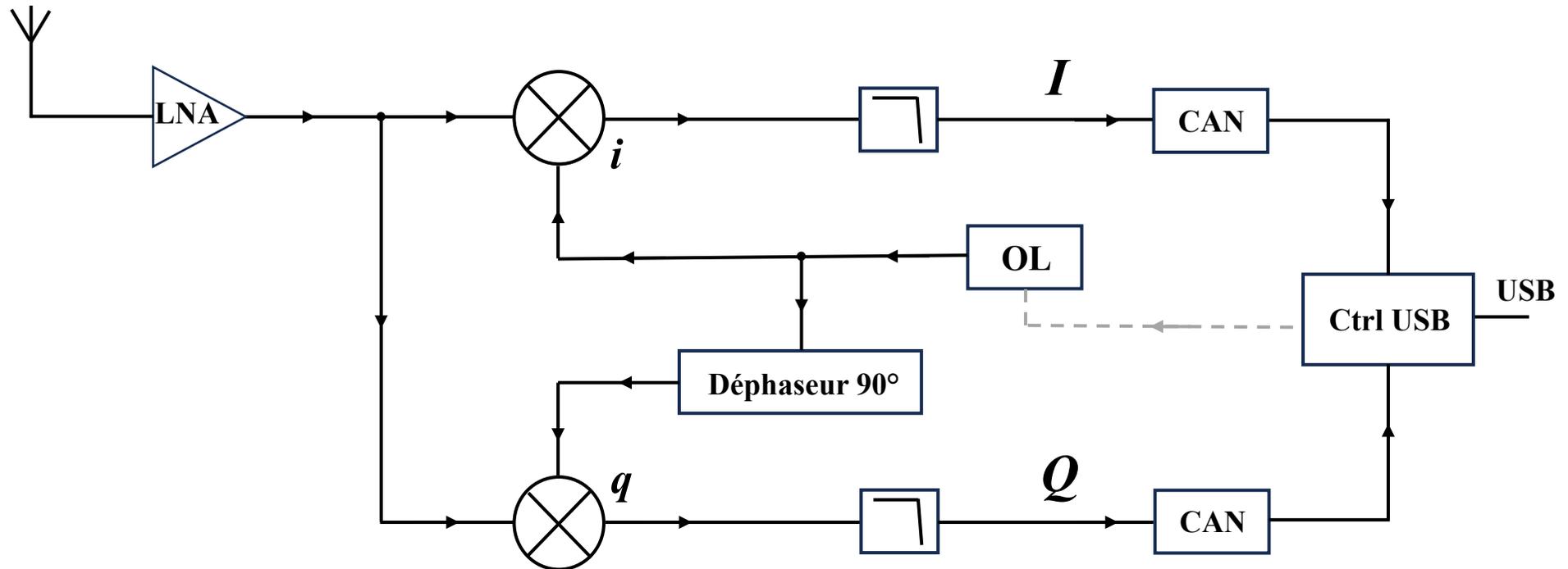
Et on obtient :

$$I = \frac{mA_p}{2} \cos(\omega_u t)$$

$$Q = 0$$

11. L'ensemble de réception, jusqu'au contrôleur de port USB

À nouveau, ce n'est qu'un exemple de structure !



LNA : Low Noise Amplifier

CAN : Convertisseur Analogique Numérique

Ctrl USB : Contrôleur de port USB

Je vous remercie de votre attention !